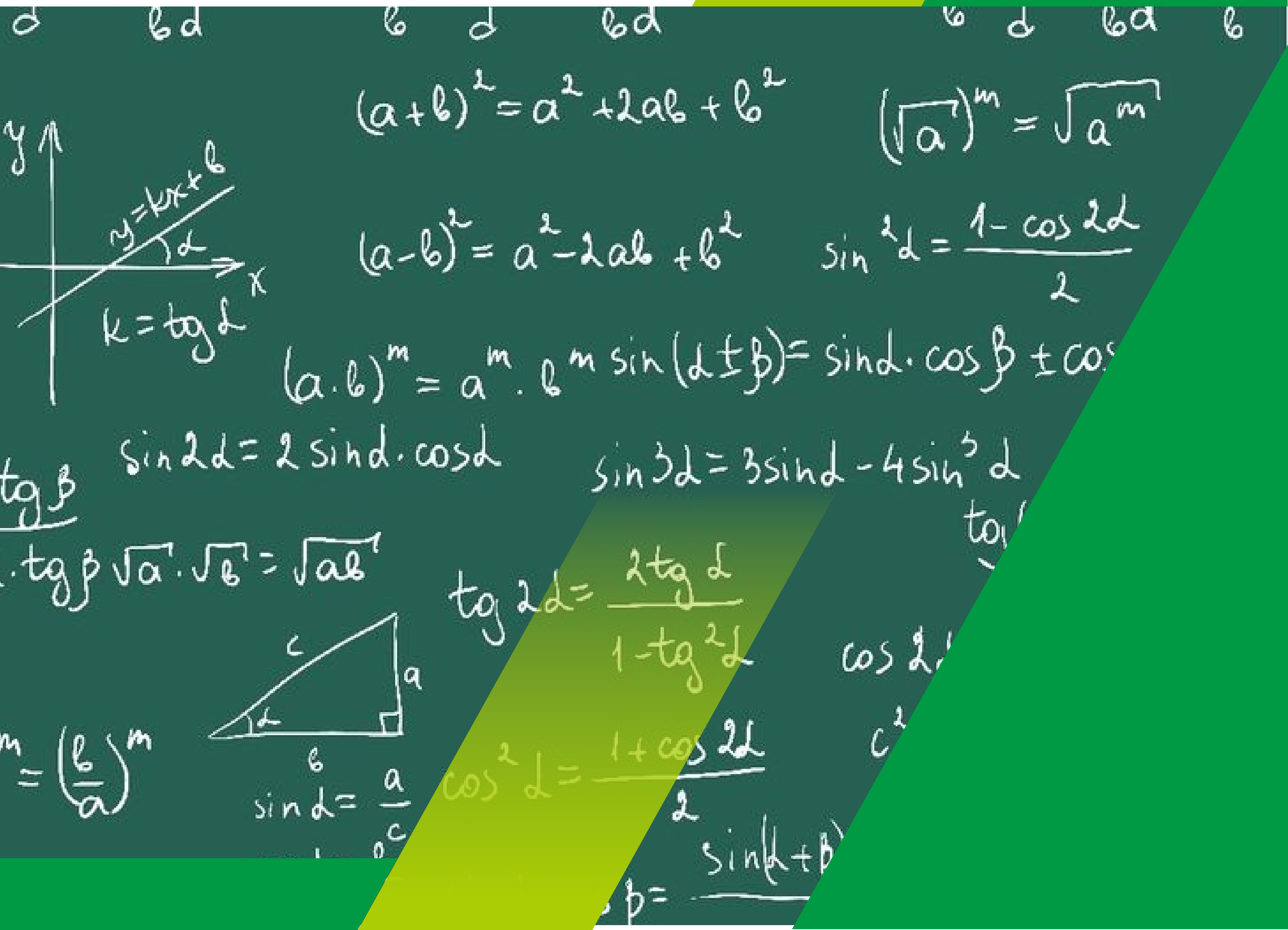
Kalkulus



Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom, M.Si, MM

YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK

KALKULUS

Penulis :
Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom., M.Si., MM.

ISBN : 9 786235 734880

Editor :
Dr. Joseph Teguh Santoso, S.Kom., M.Kom.

Penyunting :
Dr. Mars Caroline Wibowo. S.T., M.Mm.Tech

Desain Sampul dan Tata Letak :
Irdha Yunianto, S.Ds., M.Kom.

Penebit :
Yayasan Prima Agus Teknik Bekerja sama dengan
Universitas Sains & Teknologi Komputer (Universitas STEKOM)

Redaksi :
Jl. Majapahit no 605 Semarang
Telp. (024) 6723456
Fax. 024-6710144
Email : penerbit_ypat@stekom.ac.id

Distributor Tunggal :
Universitas STEKOM
Jl. Majapahit no 605 Semarang
Telp. (024) 6723456
Fax. 024-6710144
Email : info@stekom.ac.id

KATA PENGANTAR

Puji syukur pada Tuhan Yang Maha Esa bahwa buku yang berjudul "**Kalkulus**" ini dapat diselesaikan dengan baik. Kalkulus adalah salah satu ilmu matematika yang membahas tentang penggunaan Diferensial, Integral, Limit dan deret tak hingga. Buku ini akan memberikan pengetahuan tentang perhitungan kalkulus. Banyak masalah sains dan teknik yang pemecahan model matematikanya memerlukan kalkulus. Oleh sebab itu, sangat penting bagi mahasiswa sains dan teknik untuk mempelajari tentang kalkulus.

Buku Ajar Kalkulus ditujukan untuk mahasiswa yang perlu memperdalam kalkulus mereka untuk mempersiapkan studi lain, dan para pembaca awam dari segala usia yang ingin pengenalan yang baik untuk subjek. Buku ini mencakup dua topik terpenting yang pertama kalkulus: diferensial dan integral. Jika sudah memiliki kalkulus dasar, tetapi sudah beberapa tahun dan Anda ingin meninjau konsep untuk memperdalam kalkulusnya, Buku buku ini akan memberi pembaca penyegaran yang cepat dan tanpa basa-basi. Pembaca non-mahasiswa akan menemukan eksposisi buku ini jelas dan mudah diakses. Ini adalah buku matematika yang mudah digunakan. Kapan pun memungkinkan, penulis menjelaskan konsep kalkulus dengan menunjukkan kepada pembaca hubungan antara kalkulus dan yang lebih mudah dari aljabar dan geometri. Penulis kemudian menunjukkan kepada pembaca bagaimana konsep kalkulus bekerja dalam contoh nyata. Lalu penulis akan memberikan rumus-rumus kalkulus yang bagus.

Buku ini terbagi menjadi 12 bab. Bab pertama buku ini akan memperkenalkan tentang kalkulus, bab ke 2 dan ke 3 menjabarkan tentang batas dan Kontinuitas. Bab ke 4 hingga bab 7 masing masing akan menjadi satu pokok bagasan yaitu tentang Deferensiasi. Bab 4 akan mebahs tentang orientasi diferensial, bab selanjutnya akan membahas tentag aturan-aturan kalkulus mengenai diferensiasi. Bab 6 akan menerangkan diferensiasi dan pengaplikasian dalam bentuk kurva, bab 7 mencakup masalah-masalah yang ditemukan dalam diferensiasi. Sedangkan bab 8 hingga bab 11, pembaca akan diperkenalkan tentang Integral, mencakup pengenalan, perhitungan integral, hingga cara penggunaannya dalam kasus kasus matematika. Bab 12 dalam buku ini, menjadi penutup buku, akan memberikan hal-hal yang harus diperhatikan dan diingat dalam kalkulu. Semoga buku ini bisa memberikan manfaat bagi pembaca, akhir kata penulis ucapkan terima kasih.

.

Penulis, November 2022

Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom, M.Si, MM

DAFTAR ISI

BAB 1
KALKULUS: BUKAN MASALAH BESAR

Dalam Bab Ini

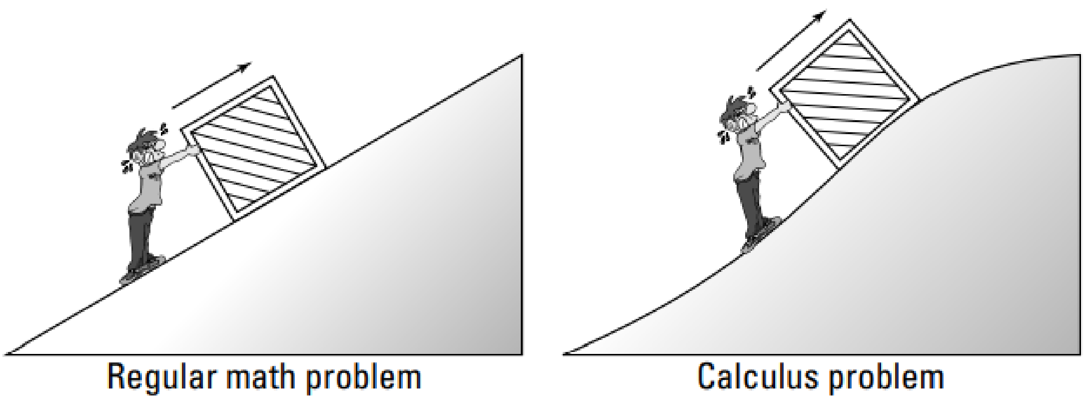
- Kalkulus — itu hanya matematika biasa yang disempurnakan
- Memperbesar adalah kuncinya
- Menggali turunan: Ini adalah tingkat atau kemiringan
- Menyelidiki integral — penambahan untuk ahli

Dalam bab ini, saya menjawab pertanyaan "Apa itu kalkulus?" dalam bahasa Inggris sederhana dan memberi Anda contoh dunia nyata tentang cara penggunaannya. Kemudian saya memperkenalkan Anda pada dua ide besar dalam kalkulus: diferensiasi dan integrasi. Akhirnya, saya menjelaskan mengapa kalkulus bekerja. Setelah membaca bab ini, Anda akan memahami apa itu kalkulus.

1.1 JADI APA ITU KALKULUS?

Kalkulus pada dasarnya hanyalah aljabar dan geometri yang sangat maju. Di satu sisi, ini bahkan bukan subjek baru — dibutuhkan aturan aljabar dan geometri biasa dan mengubahnya sehingga dapat digunakan pada masalah yang lebih rumit. (Yang menjadi masalah, tentu saja, adalah pengertian lain yang merupakan subjek baru dan lebih sulit.)

Perhatikan Gambar 1-1. Di sebelah kiri adalah seorang pria mendorong peti ke atas bidang miring lurus. Di sebelah kanan, pria itu mendorong peti yang sama ke atas bidang miring yang melengkung. Masalahnya, dalam kedua kasus, adalah menentukan jumlah energi yang dibutuhkan untuk mendorong peti ke atas. Anda dapat mengerjakan soal di sebelah kiri dengan matematika biasa. Untuk yang di sebelah kanan, Anda memerlukan kalkulus (jika Anda tidak tahu cara pintas fisika).

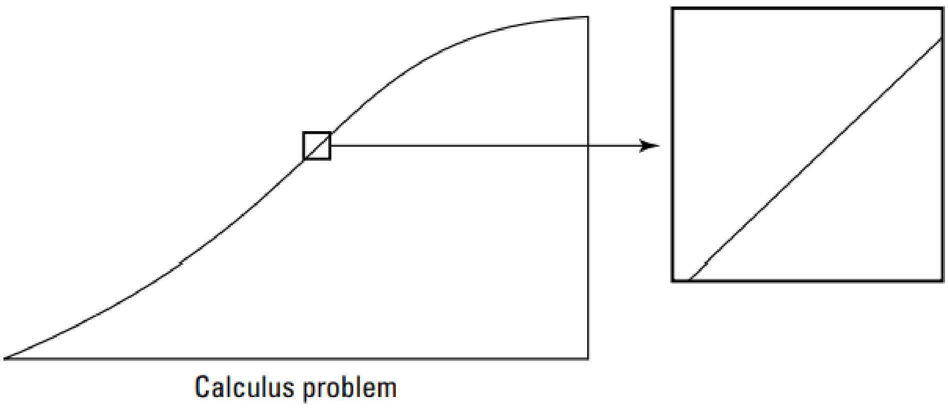


Gambar 1-1: Perbedaan antara matematika biasa dan kalkulus: Singkatnya, ini adalah kurva.

Untuk bidang miring lurus, pria mendorong dengan gaya yang tidak berubah, dan peti naik pada bidang miring dengan kecepatan yang tidak berubah. Dengan beberapa rumus fisika sederhana dan matematika biasa (termasuk aljabar dan trigonometri), Anda dapat menghitung berapa banyak kalori energi yang diperlukan untuk mendorong peti ke atas bidang miring. Perhatikan bahwa jumlah energi yang dikeluarkan setiap detik tetap sama.

Untuk tanjakan melengkung, di sisi lain, hal-hal terus berubah. Kecuraman tanjakan berubah — dan tidak seperti satu kecuraman untuk 3 kaki pertama dan kemudian kecuraman yang berbeda untuk 3 kaki berikutnya — itu terus berubah. Dan pria itu mendorong dengan gaya yang terus berubah — semakin curam tanjakan, semakin keras dorongannya. Akibatnya, jumlah energi yang dikeluarkan juga berubah, tidak hanya setiap detik atau seperseribu detik, tetapi terus-menerus, dari satu saat ke saat berikutnya. Itulah yang membuatnya menjadi masalah kalkulus. Maka, seharusnya tidak mengejutkan bagi Anda bahwa kalkulus disebut "matematika perubahan." Kalkulus mengambil aturan matematika reguler dan menerapkannya pada masalah yang cair dan berkembang.

Untuk masalah kemiringan melengkung, rumus fisika tetap sama, dan aljabar serta trigonometri yang Anda gunakan tetap sama. Perbedaannya adalah — berbeda dengan masalah tanjakan lurus, yang dapat Anda lakukan dalam satu bidikan — Anda harus memecah masalah tanjakan melengkung menjadi potongan-potongan kecil dan melakukan setiap potongan secara terpisah. Gambar 1-2 menunjukkan sebagian kecil dari tanjakan melengkung yang diledakkan hingga beberapa kali ukurannya.



Gambar 1-2: Memperbesar kurva — voila, itu lurus (hampir).

Saat Anda memperbesar cukup jauh, panjang kecil bidang miring yang melengkung menjadi hampir lurus. Kemudian Anda dapat menyelesaikan bongkahan kecil itu seperti halnya masalah tanjakan lurus. Setiap potongan kecil dapat diselesaikan dengan cara yang sama, dan kemudian Anda hanya menambahkan semua potongan.

Itu kalkulus secara singkat. Dibutuhkan masalah yang tidak dapat dilakukan dengan matematika biasa karena hal-hal terus berubah — jumlah yang berubah muncul pada grafik sebagai kurva — memperbesar kurva sampai menjadi lurus, dan kemudian menyelesaikan masalah dengan reguler matematika.

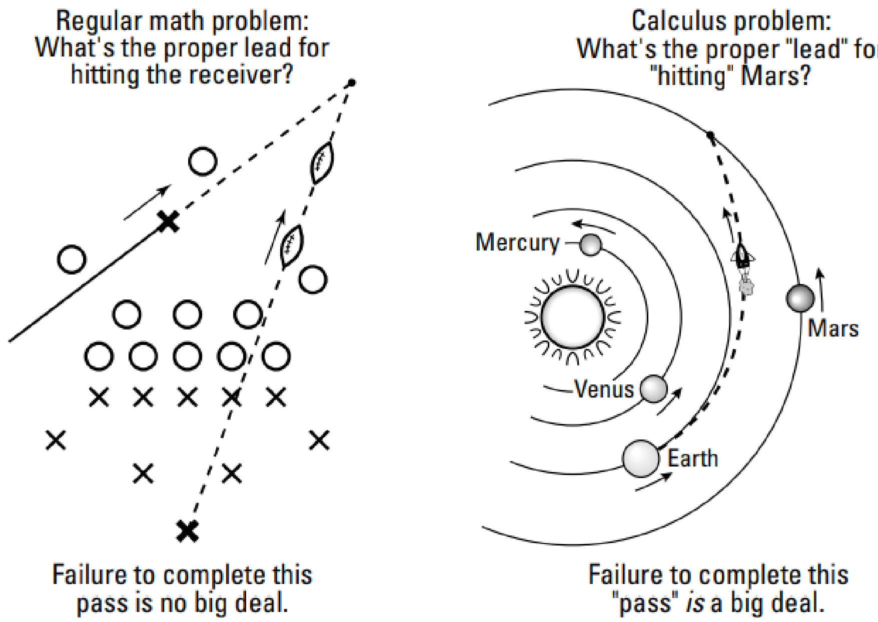
Apa yang membuat kalkulus menjadi pencapaian yang luar biasa adalah bahwa ia melakukan apa yang tampaknya mustahil: ia memperbesar tanpa batas. Faktanya, segala sesuatu dalam kalkulus melibatkan tak terhingga dalam satu atau lain cara, karena jika sesuatu terus berubah, itu sering berubah tak terhingga dari setiap momen sangat kecil ke momen berikutnya.

1.2 CONTOH KALKULUS DUNIA NYATA

Jadi, dengan matematika biasa kamu bisa mengerjakan soal tanjakan lurus; dengan kalkulus Anda dapat melakukan masalah kemiringan melengkung. Dengan matematika biasa, Anda dapat menentukan panjang kabel terkubur yang membentang secara diagonal dari satu sudut taman ke sudut lainnya (ingat Teorema Pythagoras?). Dengan kalkulus, Anda dapat menentukan panjang kabel yang digantung di antara dua menara yang berbentuk catenary (yang berbeda, dari busur lingkaran sederhana atau parabola). Mengetahui panjang pastinya sangat penting bagi perusahaan listrik yang merencanakan ratusan mil kabel listrik baru.

Anda dapat menghitung luas atap datar sebuah rumah dengan matematika biasa. Dengan kalkulus, Anda dapat menghitung luas bentuk non-bola yang rumit seperti kubah Metrodome Minneapolis. Arsitek perlu mengetahui area kubah untuk menentukan biaya material dan untuk menghitung berat kubah (dengan dan tanpa salju di atasnya). Bobot tentunya diperlukan untuk perencanaan kekuatan struktur pendukung.

Dengan matematika biasa dan fisika sederhana, Anda dapat menghitung berapa banyak quarterback harus memimpin penerima umpan jika penerima berjalan dalam garis lurus dan dengan kecepatan konstan. Tetapi ketika NASA, pada tahun 1975, menghitung "timbal" yang diperlukan untuk mengarahkan Viking I ke Mars, itu membutuhkan kalkulus karena Bumi dan Mars bergerak pada orbit elips, dan kecepatan keduanya terus berubah — belum lagi fakta bahwa dalam perjalanannya ke Mars, pesawat ruang angkasa itu dipengaruhi oleh tarikan gravitasi Bumi, bulan, Mars, matahari yang berbeda dan terus berubah. Lihat Gambar 1-3.

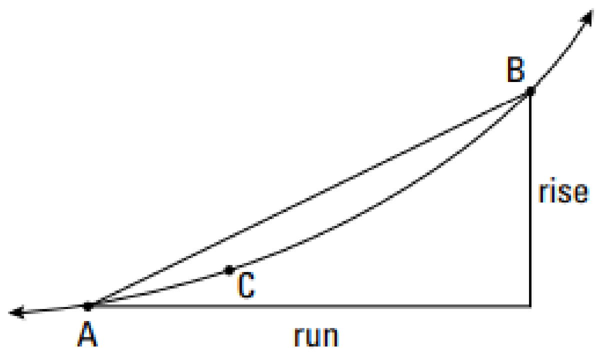


Gambar 1-3: SM (Sebelum Era Kalkulus) dan CE (Era Kalkulus).

1.3 DIFERENSIASI

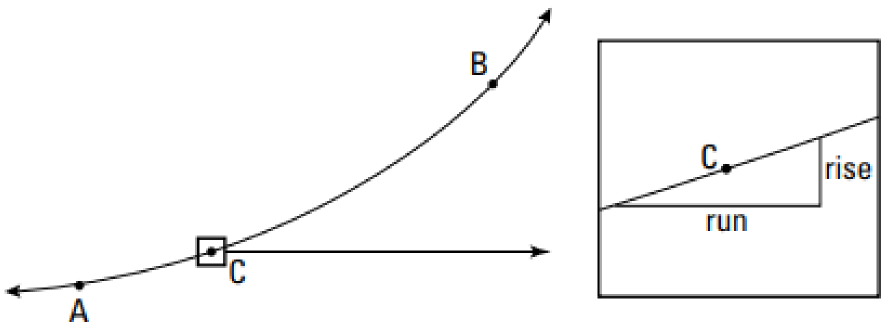
Diferensiasi adalah ide besar pertama dalam kalkulus. Ini adalah proses menemukan turunan dari kurva. Dan turunan hanyalah istilah kalkulus mewah untuk kemiringan atau kecuraman kurva.

Dalam aljabar, Anda telah mempelajari bahwa kemiringan garis sama dengan rasio kenaikan terhadap lintasan. Dengan kata lain, $Slope = \frac{rise}{run}$. Pada Gambar 1-4, kenaikannya adalah setengah dari panjang run, sehingga segmen AB memiliki kemiringan 1/2. Pada sebuah kurva, kemiringannya selalu berubah, sehingga diperlukan kalkulus untuk menentukan kemiringannya.



Gambar 1-4: Menghitung kemiringan suatu kurva tidak sesederhana rise over run.

Kemiringan segmen AB sama pada setiap titik dari A ke B. Tetapi kecuraman kurva berubah antara A dan B. Di A, kurva kurang curam dari segmen, dan di B kurva lebih curam daripada segmen. Jadi apa yang Anda lakukan jika Anda ingin kemiringan yang tepat, katakanlah, titik C? Anda tinggal memperbesar. Lihat Gambar 1-5.

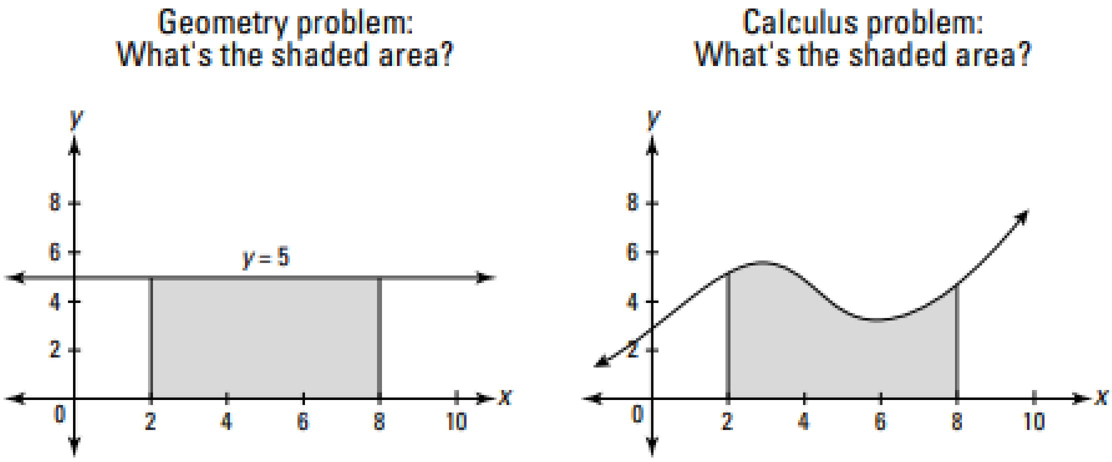


Gambar 1-5: Memperbesar kurva.

Saat Anda memperbesar cukup jauh — sebenarnya sangat jauh — bagian kecil dari kurva menjadi lurus, dan Anda dapat menghitung kemiringan dengan cara kuno. Begitulah cara kerja diferensiasi.

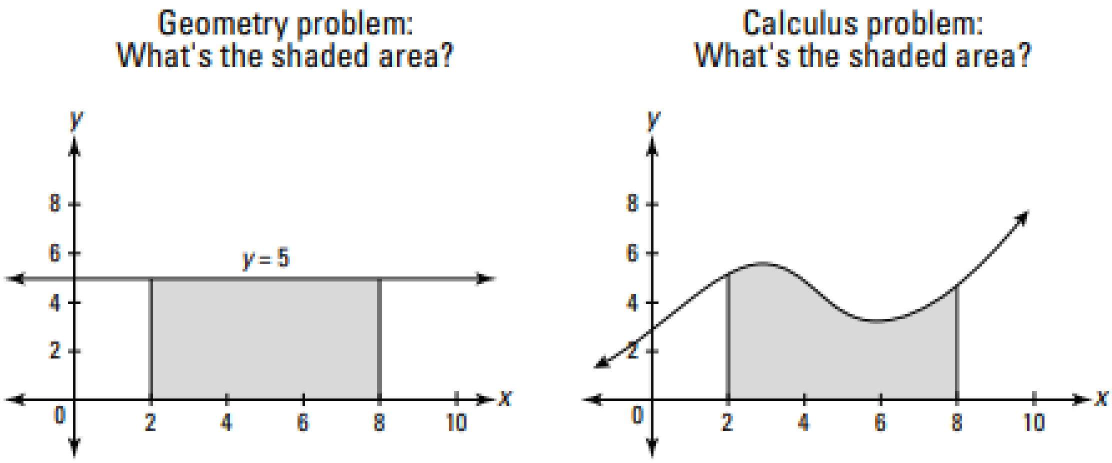
1.4 INTEGRASI

Integrasi, ide besar kedua dalam kalkulus, pada dasarnya hanyalah tambahan yang bagus. Integrasi adalah proses memotong suatu area menjadi bagian-bagian kecil, mencari tahu areanya, dan kemudian menambahkannya untuk mendapatkan seluruh area. Gambar 1-6 menunjukkan dua masalah area — satu yang dapat Anda lakukan dengan geometri dan satu lagi di mana Anda membutuhkan kalkulus.



Gambar 1-6: Jika Anda tidak dapat menentukan area di sebelah kiri, tutup kalkulator Anda.

Area yang diarsir di sebelah kiri adalah persegi panjang sederhana, jadi tentu saja luasnya sama dengan panjang kali lebar. Tetapi Anda tidak dapat menghitung luas di sebelah kanan dengan geometri biasa karena tidak ada rumus luas untuk bentuk lucu ini. Jadi apa yang kamu lakukan? Mengapa, memperbesar, tentu saja. Gambar 1-7 menunjukkan bagian atas strip sempit dari bentuk aneh yang diledakkan hingga beberapa kali ukurannya.



Gambar 1-7: Untuk kesekian kalinya: Saat Anda memperbesar, kurva menjadi lurus.

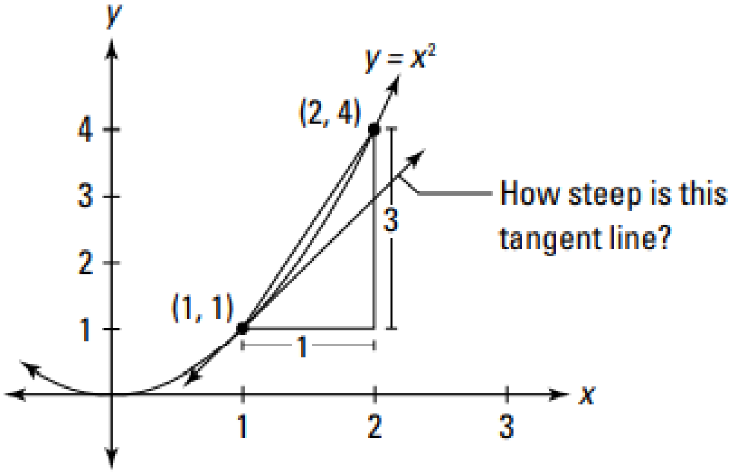
Saat Anda memperbesar, kurva menjadi hampir lurus, dan semakin jauh Anda memperbesar, semakin lurus — dengan integrasi, Anda benar-benar memperbesar sangat dekat, semacam itu. Anda berakhir dengan bentuk di sebelah kanan pada Gambar 1-7, trapesium biasa — atau segitiga yang berada di atas persegi panjang. Karena Anda dapat menghitung luas persegi panjang, segitiga, dan trapesium dengan geometri biasa, Anda dapat memperoleh luas ini dan semua strip tipis lainnya, lalu menjumlahkan semua luas ini untuk mendapatkan luas total. Itu integrasi.

1.5 MENGAPA KALKULUS BEKERJA

Matematika kalkulus bekerja karena kurva secara lokal lurus; dengan kata lain, mereka langsung pada tingkat mikroskopis. Bumi itu bulat, tetapi bagi kita itu terlihat datar karena kita berada pada tingkat mikroskopis jika dibandingkan dengan ukurannya di bumi. Kalkulus berfungsi karena ketika Anda memperbesar dan kurva menjadi lurus, Anda dapat menggunakan aljabar dan geometri biasa dengannya. Proses pembesaran ini dicapai melalui matematika batas.

Batas: Mikroskop Matematika

Matematika batas adalah mikroskop yang memperbesar kurva. Katakanlah Anda menginginkan kemiringan atau kecuraman parabola $y = x^2$ yang tepat pada titik (1, 1). Lihat Gambar 1-8.

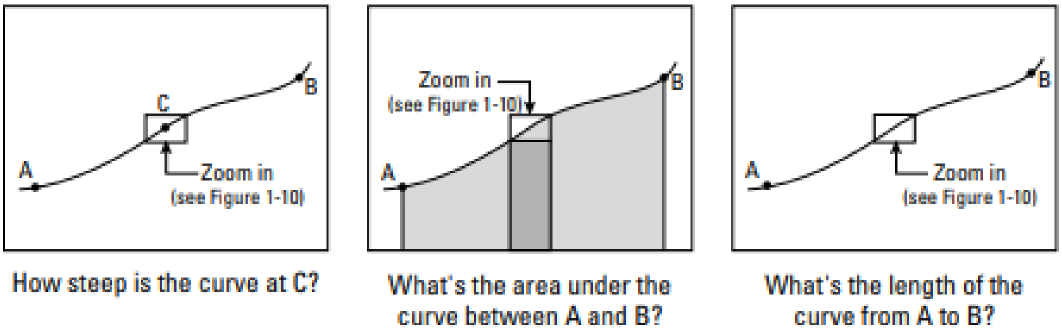


Gambar 1-8: Parabola $y = x^2$ dengan tangen di (1, 1).

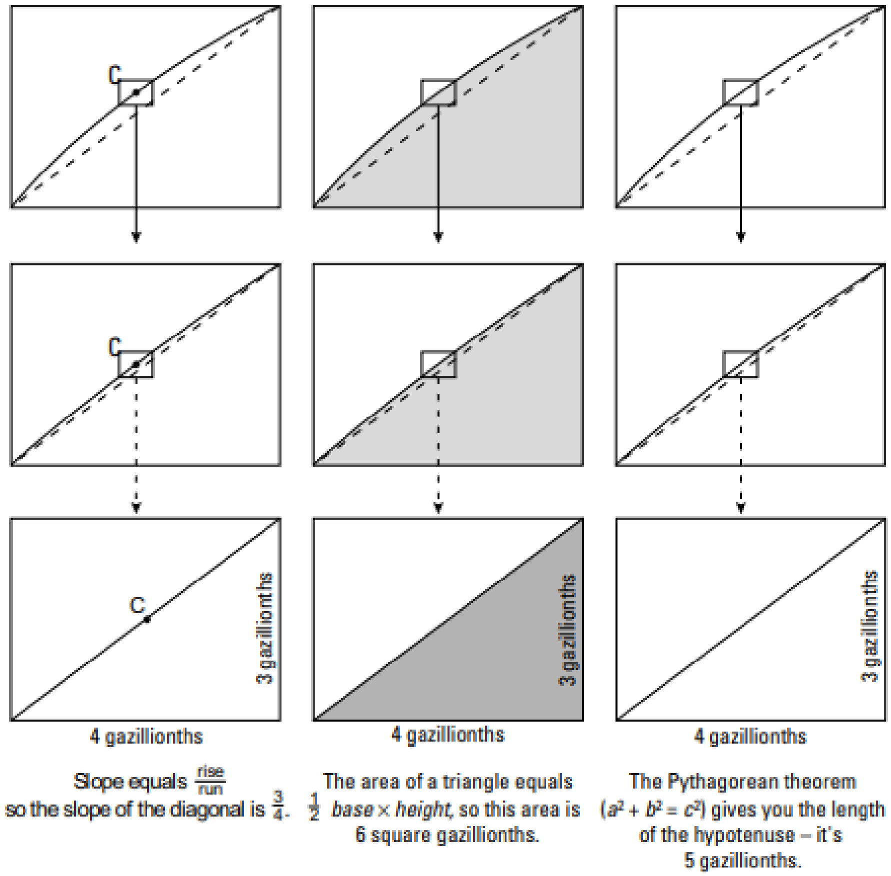
Dengan rumus kemiringan dari aljabar, Anda dapat menghitung kemiringan garis antara (1, 1) dan (2, 4) — Anda melewati 1 dan ke atas 3, sehingga kemiringannya adalah 3/1, atau 3. Tetapi Anda dapat lihat pada Gambar 1-8 bahwa garis ini lebih curam daripada tangen di (1, 1) yang menunjukkan kecuraman parabola pada titik tertentu. Proses limit memungkinkan Anda menggeser titik yang dimulai pada (2, 4) ke bawah menuju (1, 1) hingga jaraknya seperseribu inci, lalu sepersejuta, lalu sepersejuta, dan seterusnya hingga ke tingkat mikroskopis. Jika Anda menghitungnya, kemiringan antara (1, 1) dan titik bergerak Anda akan terlihat seperti 2.001, 2.000001, 2.000000001, dan seterusnya. Dan dengan matematika batas yang hampir ajaib, Anda dapat menyimpulkan bahwa kemiringan pada (1, 1) tepat 2, meskipun titik gesernya tidak pernah mencapai (1, 1). (Jika ya, Anda hanya memiliki satu titik tersisa dan Anda memerlukan dua titik terpisah untuk menggunakan rumus kemiringan.) Matematika dari limit semuanya didasarkan pada proses pembesaran ini, dan ini berhasil, sekali lagi, karena semakin jauh Anda memperbesar, semakin lurus kurvanya.

Apa yang Terjadi Saat Anda Memperbesar

Gambar 1-9 menunjukkan tiga diagram dari satu kurva dan tiga hal yang mungkin ingin Anda ketahui tentang kurva: 1) kemiringan atau kecuraman yang tepat di titik C, 2) luas di bawah kurva antara A dan B, dan 3) persisnya panjang kurva dari A ke B. Anda tidak dapat menjawab pertanyaan ini dengan matematika biasa karena rumus matematika reguler untuk kemiringan, luas, dan panjang bekerja untuk garis lurus (dan kurva sederhana seperti lingkaran), tetapi tidak untuk kurva aneh seperti ini satu.



Gambar 1-9: Satu kurva — tiga pertanyaan.



Gambar 1-10: Memperbesar sub, sub, sub . . . tingkat subatomik.

Baris pertama Gambar 1-10 menunjukkan detail yang diperbesar dari tiga diagram kurva pada Gambar 1-9. Baris kedua menunjukkan pembesaran lebih lanjut. Setiap perbesaran membuat kurva lebih lurus dan lebih lurus dan lebih dekat dan lebih dekat ke garis diagonal. Proses ini berlanjut tanpa batas. Akhirnya, baris bawah Gambar 1-10 menunjukkan hasil setelah jumlah perbesaran "tak terbatas" — semacam. Anda dapat memikirkan panjang 3 dan 4 di baris bawah persegi panjang sebagai 3 dan 4 sepersejuta inci, tidak, jadilah 3 dan 4 miliar inci, tidak, sepersejuta, tidak, sepersejuta, ...

Setelah memperbesar "selamanya", kurva menjadi lurus sempurna, dan sekarang rumus aljabar dan geometri biasa berfungsi. Untuk diagram di sebelah kiri pada Gambar 1-10, Anda sekarang dapat menggunakan rumus kemiringan reguler dari aljabar untuk menemukan kemiringan di titik C. Tepatnya 3/4 — itulah jawaban untuk pertanyaan pertama pada Gambar 1-9 . Beginilah cara kerja diferensiasi. Untuk diagram di tengah, rumus segitiga beraturan dari geometri memberikan luas 6. Jadi untuk mendapatkan luas total yang diarsir pada Gambar 1-9, Anda menambahkan luas persegi panjang tipis di bawah segitiga ini (garis tipis di Gambar 1-9 menunjukkan ide dasarnya), ulangi proses ini untuk semua strip sempit lainnya, dan kemudian tambahkan saja semua area kecil. Beginilah cara kerja integrasi reguler. Untuk diagram di sebelah kanan, teorema Pythagoras geometri memberi Anda panjang 5. Kemudian untuk menemukan panjang total kurva dari A ke B pada Gambar 1-9, Anda melakukan hal yang sama untuk bagian menit lainnya dari kurva dan kemudian menjumlahkan semua panjang kecil. Ini adalah bagaimana Anda menghitung panjang busur (masalah integrasi lainnya).

Nah, itu dia. Kalkulus menggunakan proses limit untuk memperbesar kurva sampai lurus. Setelah lurus, aturan matematika lama biasa berlaku. Kalkulus dengan demikian memberikan aljabar dan geometri biasa kekuatan untuk menangani masalah rumit yang melibatkan perubahan kuantitas (yang pada grafik muncul sebagai kurva). Ini menjelaskan mengapa kalkulus memiliki begitu banyak kegunaan praktis, karena jika ada sesuatu yang Anda yakin bisa andalkan — selain kematian dan pajak — hal itu selalu berubah.

BAB 2
BATAS DAN KONTINUITAS

Dalam Bab Ini

- Melihat batas
- Mengevaluasi fungsi dengan lubang
- Menjelajahi kontinuitas dan diskontinuitas

Batas adalah dasar untuk kalkulus diferensial dan integral. Definisi formal turunan melibatkan limit seperti halnya definisi integral tertentu.

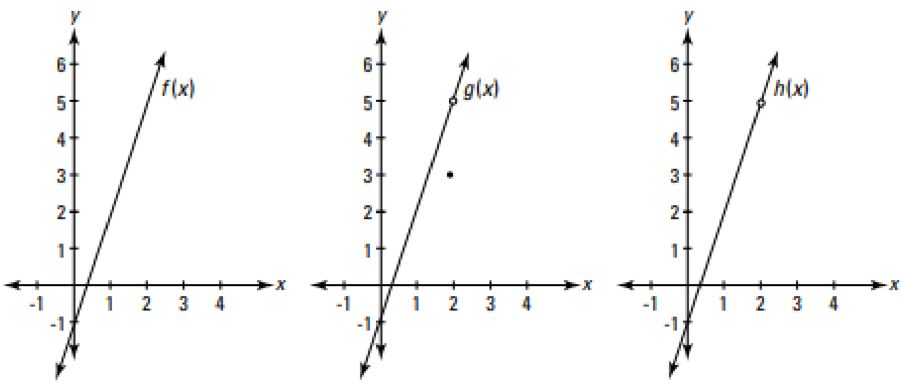
2.1 MEMBAWANYA KE BATAS

Limit dari suatu fungsi (jika ada) untuk beberapa nilai x, a, adalah tinggi fungsi yang semakin dekat dan semakin dekat ketika x semakin dekat ke a dari kiri dan kanan.

Biarkan saya mengatakan itu dengan cara lain. Suatu fungsi memiliki limit untuk nilai x yang diberikan jika fungsi tersebut nol pada ketinggian tertentu saat x semakin dekat dan mendekati nilai yang diberikan dari kiri dan kanan. Lebih mudah untuk memahami batasan melalui contoh daripada melalui omong kosong semacam ini, jadi lihatlah beberapa.

Tiga Fungsi dengan Satu Batas

Perhatikan fungsi pada $f(x) = 3x - 1$ Gambar 2-1. Ketika kita mengatakan bahwa limit dari $f(x)$ mendekati 2 adalah 5, yang ditulis sebagai $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$, yang kita maksudkan bahwa ketika x semakin dekat dan mendekati 2 dari kiri dan kanan, $f(x)$ semakin dekat dan dekat dengan ketinggian 5. (Sejauh saya tahu, angka 2 dalam contoh ini tidak memiliki nama resmi, tetapi saya menyebutnya sebagai angka-x.) Lihat Tabel 2-1.



Gambar 2-1: Grafik dari (x) , $g(x)$, dan $h(x)$

Tabel 2-1 Nilai Input dan Output dari $f(x) = 3x - 1$ sebagai x Pendekatan 2

x approaches 2 from the left → ← *x* approaches 2 from the right

x	1	1.5	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1	2.5	3
f(*x*)	2	3.5	4.7	4.97	4.997		5.003	5.03	5.3	6.5	8

y approaches 5 → ← *y* approaches 5

Pada Tabel 2-1, y mendekati 5 saat x mendekati 2 dari kiri dan kanan, dan dengan demikian batasnya adalah 5. Tapi mengapa harus ribut-ribut dengan angka-angka di tabel? Mengapa tidak memasukkan angka 2 ke dalam 3x – 1 dan mendapatkan jawaban 5? Faktanya, jika semua fungsi kontinu (tanpa celah) seperti pada Gambar 2-1, Anda cukup memasukkan angka-x untuk mendapatkan jawabannya, dan masalah limit pada dasarnya tidak ada gunanya.

Kita membutuhkan limit dalam kalkulus karena fungsi seperti pada Gambar 2-1 yang memiliki lubang. *g* identik dengan f kecuali untuk lubang di (2, 5) dan titik di (2, 3). *h* identik dengan f kecuali untuk lubang di (2, 5).

Bayangkan seperti apa tabel nilai input dan output untuk g dan h. Dapatkah Anda melihat bahwa nilainya akan sama dengan nilai pada Tabel 2-1 untuk f ? Untuk g dan h, saat x semakin dekat ke 2 dari kiri dan kanan, y semakin dekat dan semakin dekat ke ketinggian 5. Untuk ketiga fungsi, limit saat x mendekati 2 adalah 5.

Ini membawa kita ke titik kritis: Ketika menentukan limit suatu fungsi ketika x mendekati, katakanlah, 2, nilai fungsi ketika x = 2 sama sekali tidak relevan. Pertimbangkan tiga fungsi di mana x = 2: $f(2)$ samadengan 5, $g(2)$ adalah 3, $h(2)$ dan tidak ada (tidak terdefinisi). Namun, sekali lagi, ketiga hasil tersebut tidak relevan dan tidak mempengaruhi jawaban soal limit.

CRITICAL CALC CONCEPT

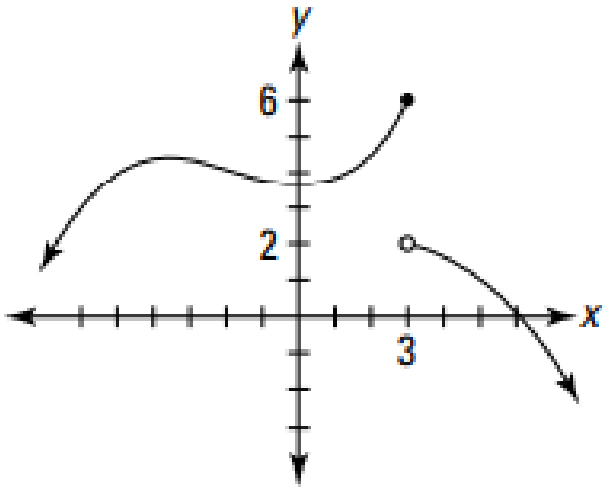
Dalam masalah batas, x semakin dekat ke bilangan x tetapi secara teknis tidak pernah sampai di sana, dan apa yang terjadi pada fungsi ketika x sama dengan bilangan x tidak berpengaruh pada jawaban masalah batas (walaupun untuk fungsi kontinu seperti f nilai fungsi sama dengan jawaban batas dan dengan demikian dapat digunakan untuk menghitung jawaban batas).

Batas Satu Sisi

Batas satu sisi bekerja seperti biasa, batas dua sisi kecuali bahwa x mendekati bilangan x dari kiri atau kanan saja. Untuk menunjukkan batas satu sisi, Anda menempatkan tanda pengurangan superskrip pada bilangan x ketika x mendekati bilangan x dari kiri atau tanda penambahan superskrip ketika x mendekatinya dari kanan:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) \text{ atau } \lim_{x\to 10^+} f(x)$$

Lihat Gambar 2-2. Jawaban untuk masalah batas reguler, $\lim_{x\to 3} p(x)$, adalah bahwa limitnya tidak ada karena ketika x mendekat 3 dari kiri dan kanan, $p(x)$ tidak membidik pada ketinggian yang sama.



Gambar 2-2: $p(x)$: Ilustrasi dua batas satu sisi.

Namun, kedua batas satu sisi memang ada. Saat x mendekati 3 dari kiri, p nol pada ketinggian 6, dan ketika x mendekati 3 dari kanan, p nol pada ketinggian 2. Seperti halnya batas biasa, nilai $p(3)$ tidak berpengaruh pada jawaban untuk salah satu dari masalah batas satu sisi ini. Dengan demikian,

$$\lim_{x\to 3^-} p(x) = 6 \text{ dan } \lim_{x\to 3^+} p(x) = 2$$

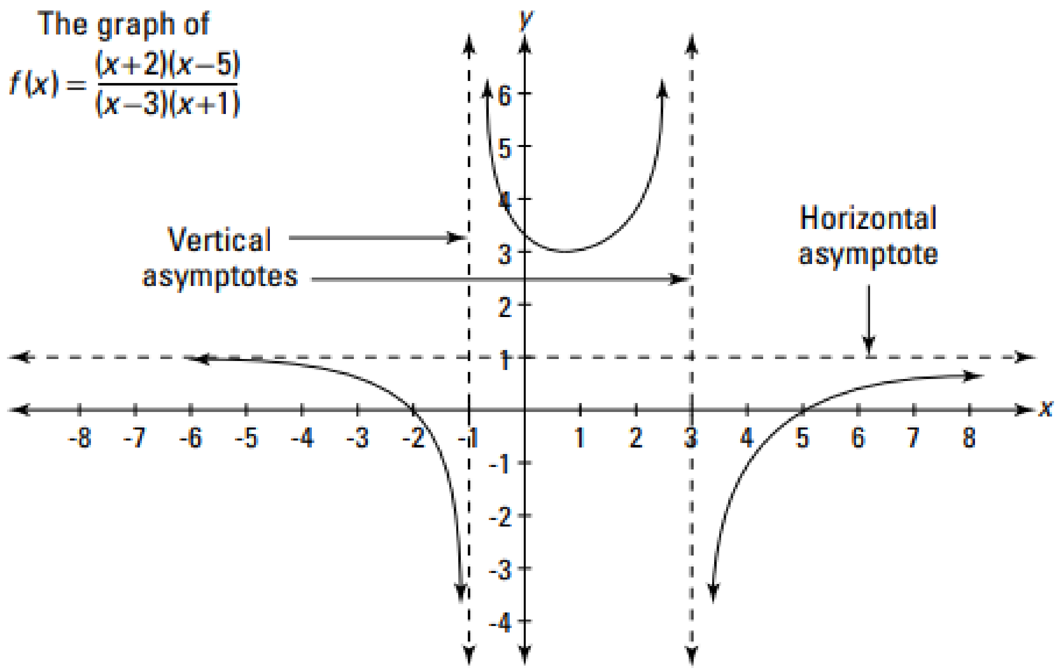
Batas dan Asimtot Vertikal

Fungsi rasional seperti $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-5)}{(x-3)(x+1)}$ memiliki asimtot vertikal pada x = 3 dan x = -1. Ingat asimtot? Mereka adalah garis imajiner yang fungsi semakin dekat dan dekat saat naik, turun, kiri, atau kanan menuju tak terhingga. f ditunjukkan pada Gambar 2-3.

Pertimbangkan limit f saat x mendekati 3. Saat x mendekati 3 dari kiri, f naik hingga tak terhingga; dan saat x mendekati 3 dari kanan, f turun ke tak terhingga negatif. Terkadang informatif untuk menunjukkan ini dengan menulis,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty \text{ dan } \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

Tetapi juga benar untuk mengatakan bahwa kedua batas di atas tidak ada karena infinity bukanlah bilangan real. Dan jika Anda diminta untuk menentukan batas dua sisi reguler, $\lim_{x\to 3} f(x)$, Anda harus mengatakan bahwa itu tidak ada karena batas dari kiri dan dari kanan tidak sama.



Gambar 2-3: Fungsi rasional tipikal.

Batas dan Asimtot Horizontal

Sampai sekarang, saya telah melihat batas di mana x mendekati bilangan berhingga biasa. Tetapi x juga dapat mendekati tak hingga atau tak terhingga negatif. Batas di tak terhingga ada ketika suatu fungsi memiliki asimtot horizontal. Sebagai contoh, fungsi pada Gambar 2-3 memiliki asimtot horizontal pada y = 1, yang mana fungsi tersebut merangkak seiring berjalannya menuju tak terhingga ke kanan dan tak terhingga negatif ke kiri. (Ke kiri, fungsi melintasi asimtot horizontal di x = -7 dan kemudian secara bertahap turun menuju asimtot.) Batas sama dengan tinggi asimtot horizontal dan ditulis sebagai

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \text{ dan } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

Kecepatan Sesaat

Katakanlah Anda memutuskan untuk menjatuhkan bola dari jendela lantai dua Anda. Inilah rumus yang memberi tahu Anda seberapa jauh bola telah jatuh setelah beberapa detik tertentu (mengabaikan hambatan udara):

$$h(t) = 16t^2$$

(di mana h adalah ketinggian bola jatuh, dalam kaki, dan t adalah jumlah waktu sejak bola dijatuhkan, dalam detik)

Jika Anda memasukkan 1 ke t, h adalah 16; jadi bola jatuh 16 kaki selama sekon pertama. Selama 2 detik pertama, jatuh total $16 \cdot 2^2$ atau 64 kaki, dan seterusnya. Sekarang, bagaimana jika Anda ingin menentukan kecepatan bola tepat 1 detik setelah Anda menjatuhkannya? Anda bisa mulai dengan membuat formula terpercaya ini:

$$Jarak = kecepatan \cdot waktu, jadi\ Laju = jarak/waktu$$

Dengan menggunakan rumus laju, atau kecepatan, Anda dapat dengan mudah mengetahui kecepatan rata-rata bola selama detik ke-2 kejatuhannya. Karena jatuh 16 kaki setelah 1 detik dan total 64 kaki setelah 2 detik, jatuh 64 – 16, atau 48 kaki dari t = 1 detik ke t = 2 detik. Rumus berikut memberi Anda kecepatan rata-rata:

$$\begin{aligned} Average\ speed &= \frac{total\ distance}{total\ time} \\ &= \frac{64-16}{2-1} \\ &= 48\ feet\ per\ second \end{aligned}$$

Tapi ini bukan jawaban yang Anda inginkan karena bola jatuh lebih cepat dan lebih cepat saat jatuh, dan Anda ingin mengetahui kecepatannya tepat 1 detik setelah Anda menjatuhkannya. Kecepatan bola antara 1 dan 2 detik, jadi kecepatan rata-rata 48 kaki per detik selama detik ke-2 ini pasti lebih cepat daripada kecepatan sesaat bola pada akhir detik ke-1. Untuk perkiraan yang lebih baik, hitung kecepatan rata-rata antara t = 1 detik dan t = 1,5 detik. Setelah 1,5 detik, bola telah jatuh, $16 \cdot 1.5^2$ atau 36 kaki, jadi dari t = 1 ke t = 1,5, jatuhnya 36 – 16, atau 20 kaki. Kecepatan rata-ratanya adalah

$$\begin{aligned} Average\ speed &= \frac{36-16}{1.5-1} \\ &= 40\ feet\ per\ second \end{aligned}$$

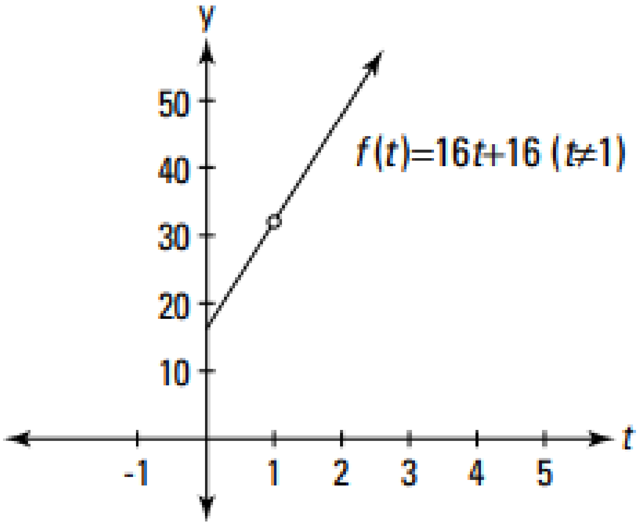
Tabel 2-2 Kecepatan Rata-rata dari 1 Detik hingga t Detik

t detik	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{100}$	$1\frac{1}{1,000}$	$1\frac{1}{10,000}$
Kecepatan rata-rata dari 1 detik. ke t detik.	48	40	36	33.6	32.16	32.016	32.0016

Saat t semakin dekat dan mendekati 1 detik, kecepatan rata-rata tampak semakin dekat dan mendekati 32 kaki per detik.

Berikut rumus yang saya gunakan untuk menghasilkan angka pada Tabel 2-2. Ini memberi Anda kecepatan rata-rata antara 1 detik dan t detik. Gambar 2-4 menunjukkan grafik fungsi ini.

$$\begin{aligned} Average\ speed &= \frac{16t^2 - 16 \cdot 1^2}{t-1} \\ &= \frac{16\left(t^2-1\right)}{t-1} \\ &= \frac{16(t-1)(t+1)}{t-1} \\ &= 16t + 16t \quad (t \neq 1) \end{aligned}$$



Gambar 2-4: Fungsi kecepatan rata-rata.

Grafik ini identik dengan grafik garis y = 16t + 16 kecuali untuk lubang di (1, 32). Ada lubang di sana karena jika Anda memasukkan 1 ke t dalam fungsi kecepatan rata-rata, Anda mendapatkan

$$Average\ speed = \frac{16\left(1^2-1\right)}{1-1} = \frac{0}{0}$$

yang tidak terdefinisi. Dan mengapa Anda mendapatkannya $\frac{0}{0}$? Karena Anda mencoba menentukan kecepatan rata-rata — yang sama dengan jarak total dibagi waktu yang telah berlalu — dari t = 1 ke t = 1. Tapi dari t = 1 ke t = 1, tentu saja, tidak ada waktu, dan “selama” titik waktu ini, bola tidak bergerak sejauh apa pun, jadi Anda mendapatkan $\frac{zero\ feet}{zero\ seconds}$ sebagai kecepatan rata-rata dari t = 1 ke t = 1.

Jelas, ada masalah di sini. Pegang topi Anda — Anda telah tiba di salah satu "Ah ha!" momen dalam pengembangan kalkulus diferensial.

Kecepatan sesaat didefinisikan sebagai batas kecepatan rata-rata ketika waktu yang berlalu mendekati nol.

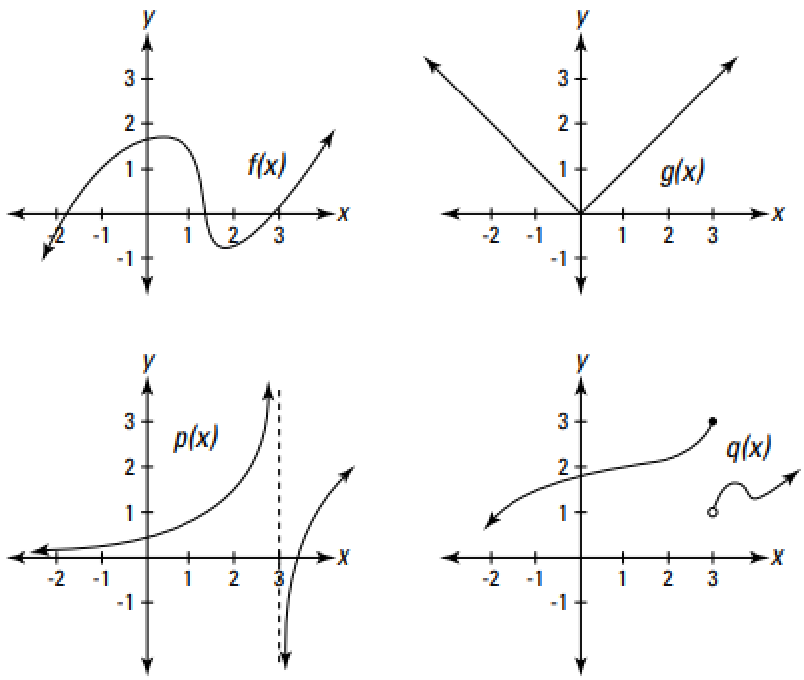
Fakta bahwa waktu yang berlalu tidak pernah sampai ke nol tidak mempengaruhi ketepatan jawaban untuk masalah batas ini — jawabannya adalah tepat 32 kaki per detik, ketinggian lubang pada Gambar 2-4. Hebatnya, batas memungkinkan Anda menghitung kecepatan sesaat yang tepat pada satu titik waktu dengan mengambil batas fungsi yang didasarkan pada waktu yang telah berlalu, periode antara dua titik waktu.

2.2 BATAS DAN KONTINUITAS

Fungsi kontinu hanyalah fungsi tanpa celah — fungsi yang dapat Anda gambar tanpa melepaskan pensil dari kertas. Pertimbangkan empat fungsi pada Gambar 2-5.

Apakah suatu fungsi kontinu atau tidak hampir selalu jelas. Dua fungsi pertama pada Gambar 2-5 — f dan g — tidak memiliki celah, jadi keduanya kontinu. Dua berikutnya — p dan q — memiliki celah di x = 3, sehingga tidak kontinu. Itu saja. Yah, tidak cukup. Dua fungsi dengan celah tidak kontinu di mana-mana, tetapi karena Anda dapat menggambar bagian-bagiannya tanpa mengambil pensil dari kertas, Anda dapat mengatakan bahwa bagian-bagiannya kontinu. Dan terkadang suatu fungsi kontinu di mana pun itu didefinisikan. Fungsi seperti itu digambarkan sebagai kontinu di seluruh domainnya, yang berarti bahwa celah atau celahnya terjadi pada nilai-x di mana fungsi tersebut tidak terdefinisi. Fungsi p kontinu di seluruh domainnya; q, di sisi lain, tidak kontinu di seluruh domainnya karena tidak kontinu di x = 3, yang ada dalam domain fungsi.

Kontinuitas dan batas biasanya berjalan beriringan. Perhatikan x = 3 pada keempat fungsi pada Gambar 2-5. Pertimbangkan apakah setiap fungsi kontinu di sana dan apakah ada limit pada nilai x itu. Dua yang pertama, f dan g, tidak memiliki celah di x = 3, jadi mereka kontinu di sana. Kedua fungsi juga memiliki limit di x = 3, dan dalam kedua kasus, limitnya sama dengan tinggi fungsi di x = 3, karena semakin x semakin dekat ke 3 dari kiri dan kanan, y semakin dekat ke $f(3)$ dan $g(3)$, masing-masing.



Gambar 2-5: Grafik fungsi f, g, p, dan q.

Fungsi p dan q, di sisi lain, tidak kontinu di x = 3 (atau Anda dapat mengatakan bahwa mereka diskontinu di sana), dan keduanya tidak memiliki batas dua sisi reguler di x = 3. Untuk kedua fungsi , celah pada x = 3 tidak hanya memutus kontinuitas, tetapi juga menyebabkan tidak adanya batas di sana karena, saat Anda bergerak menuju x = 3 dari kiri dan kanan, Anda tidak membidik beberapa nilai y tunggal.

Jadi kontinuitas pada nilai x berarti ada batas untuk nilai x itu, dan diskontinuitas pada nilai x berarti tidak ada batasan di sana . . . kecuali ketika. . . (baca terus).

Pengecualian Lubang

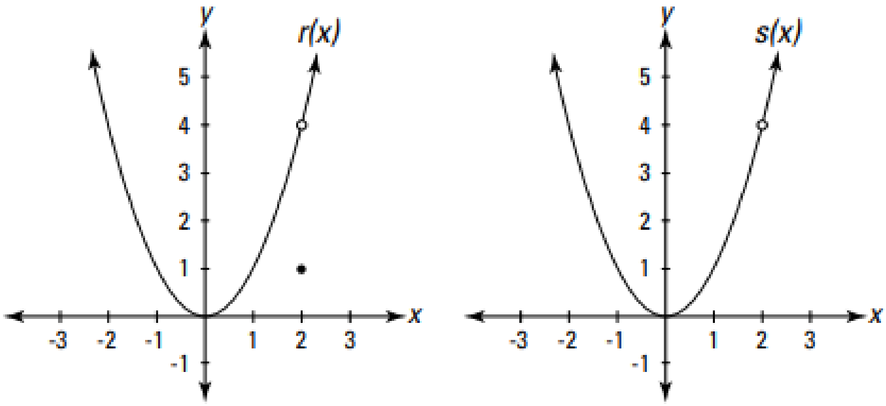
Pengecualian lubang adalah satu-satunya pengecualian untuk aturan bahwa kontinuitas dan batas berjalan beriringan, tetapi itu pengecualian besar. Dan, harus saya akui, agak aneh bagi saya untuk mengatakan bahwa kontinuitas dan batasan biasanya berjalan beriringan dan membicarakan pengecualian ini karena pengecualian adalah intinya. Ketika Anda sampai pada hal itu, pengecualian lebih penting daripada aturan. Pertimbangkan dua fungsi pada Gambar 2-6.

Fungsi-fungsi ini memiliki celah pada x = 2 dan jelas tidak kontinu di sana, tetapi mereka memiliki batas saat x mendekati 2. Dalam setiap kasus, batasnya sama dengan tinggi lubang.

Lubang sangat kecil dalam suatu fungsi adalah satu-satunya tempat suatu fungsi dapat memiliki batas di mana ia tidak kontinu.

Jadi kedua fungsi pada Gambar 2-6 memiliki limit yang sama dengan x mendekati 2; batasnya adalah 4, dan fakta bahwa $r(2) = 1$ dan $s(2)$ itu tidak terdefinisi tidak relevan. Untuk kedua fungsi, karena x nol pada 2 dari kedua sisi, ketinggian fungsi nol pada ketinggian lubang — itulah batasnya.

Batas pada lubang adalah ketinggian lubang.



Gambar 2-6: Grafik fungsi r dan s.

Pada bagian “Kecepatan Sesaat” sebelumnya, saya mencoba menghitung kecepatan rata-rata selama waktu yang berlalu nol dan mendapatkan $\frac{zero\ distance}{zero\ time}$.

Karena $\frac{0}{0}$ tidak terdefinisi, hasilnya adalah lubang di fungsi. Lubang fungsi sering muncul dari ketidakmungkinan membagi nol dengan nol. Ini adalah fungsi-fungsi di mana proses batas sangat penting, dan fungsi-fungsi tersebut berada di inti dari arti turunan, dan turunan adalah inti dari kalkulus diferensial.

Turunan selalu melibatkan pecahan tak terdefinisi $\frac{0}{0}$ dan selalu melibatkan limit fungsi dengan lubang. (Semua batas dalam Bab 4 — di mana turunannya didefinisikan secara formal — adalah batas fungsi dengan lubang.)

BAB 3
MENGEVALUASI BATAS

Dalam Bab Ini

- Menyelesaikan limit dengan aljabar
- Menemukan batasan di tak terhingga

Bab 2 memperkenalkan konsep limit. Bab ini turun ke seluk beluk dan menyajikan beberapa teknik untuk menghitung jawaban untuk membatasi masalah.

3.1 BATAS MUDAH

Beberapa masalah batas sangat mudah.

Batas Untuk Menghafal

Anda harus mengingat batasan berikut. Jika Anda gagal mengingat tiga yang terakhir, Anda akan membuang banyak waktu untuk mencoba mengingatnya.

- $\lim_{x \to a} c = c$

(y = c adalah garis horizontal, jadi limit — yang merupakan tinggi fungsi — harus sama dengan c terlepas dari bilangan x.)

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2.718$

3.2 BATAS PLUG AND CHUG

Masalah plug-and-chug merupakan kategori kedua dari batasan mudah. Cukup colokkan x-number ke fungsi limit, dan jika perhitungan menghasilkan angka, itulah jawaban Anda. Sebagai contoh,

$$\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 10\right) = -1$$

Metode ini bekerja untuk limit yang melibatkan fungsi kontinu dan fungsi yang kontinu di seluruh domainnya. Ini adalah masalah batas yang baik, dan, sejujurnya, benar-benar tidak ada gunanya bagi mereka. Batasnya hanyalah nilai fungsi.

Metode plug-and-chug bekerja untuk semua jenis fungsi kecuali ada diskontinuitas pada x-number yang Anda pasang. Dalam hal ini, nomor yang Anda dapatkan setelah mencolokkan bukanlah batasnya.

Dan jika Anda memasukkan angka-x ke dalam batas seperti $\lim_{x \to 5} \frac{10}{x-5}$ dan Anda dapatkan angka apa pun (selain nol) dibagi nol — seperti $\frac{10}{0}$ — maka Anda tahu bahwa batasnya tidak ada.

3.3 MASALAH BATAS "NYATA"

Jika Anda memasukkan x-number ke dalam ekspresi limit dan hasilnya tidak terdefinisi (biasanya $\frac{0}{0}$), Anda memiliki masalah limit "nyata" — dan beberapa pekerjaan yang harus dilakukan. Dalam bab ini, Anda mempelajari teknik aljabar untuk memecahkan masalah limit "nyata" ini.

Anda menggunakan dua teknik aljabar utama untuk masalah limit "nyata": pemfaktoran dan perkalian konjugasi. Saya menggabungkan teknik aljabar lainnya di bagian "Aljabar lain-lain." Semua metode aljabar melibatkan ide dasar yang sama. Ketika substitusi tidak berfungsi dalam fungsi aslinya — biasanya karena adanya lubang pada fungsi tersebut — Anda dapat menggunakan aljabar untuk memanipulasi fungsi hingga substitusi berhasil (ini berfungsi karena manipulasi Anda menutup lubang).

Anjak piutang

Ini contohnya. Evaluasi $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$

1. **Coba masukkan 5 ke x — Anda harus selalu mencoba substitusi terlebih dahulu.**
   Anda mendapatkan $\frac{0}{0}$ — tidak bagus, ke rencana B.
2. **dapat difaktorkan, jadi lakukanlah.**
$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$$
$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$
3. **Batalkan (x – 5) dari pembilang dan penyebut.**
$$= \lim_{x \to 5} (x+5)$$
4. **Sekarang substitusi akan bekerja.**
$$-5 + 5 = 10$$

Fungsi yang Anda peroleh setelah membatalkan (x – 5), yaitu (x + 5), identik dengan fungsi aslinya, , kecuali bahwa $\frac{x^2-25}{x-5}$ lubang pada fungsi aslinya pada (5, 10) telah terpasang.

Perhatikan bahwa limit saat x mendekati 5 adalah 10, yang merupakan ketinggian lubang di (5, 10).

Perkalian Konjugasi

Coba metode ini untuk fungsi pecahan yang mengandung akar kuadrat. Perkalian konjugasi merasionalisasi pembilang atau penyebut pecahan, yang berarti menyingkirkan akar kuadrat. Coba yang ini: Evaluasi $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

1. **Coba substitusi.**
   Pasang 4: itu memberi Anda $\frac{0}{0}$ — waktu untuk rencana B.
2. **Kalikan pembilang dan penyebutnya dengan konjugat dari $\sqrt{x} - 2$, yaitu $\sqrt{x} + 2$.**
   Sekarang lakukan rasionalisasi.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$
$$= \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(x-4\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)}$$
$$= \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2^2}{\left(x-4\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$
$$= \lim_{x \to 4} \frac{\left(x-4\right)}{\left(x-4\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

3. **Batalkan (x – 4) dari pembilang dan penyebut.**

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

4. **Sekarang substitusi berfungsi.**

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

Seperti contoh pemfaktoran, proses rasionalisasi ini menyumbat lubang pada fungsi aslinya. Dalam contoh ini, 4 adalah bilangan x, $\frac{1}{4}$ adalah jawabannya, dan fungsinya $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ memiliki lubang di $\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

Aljabar Lain-lain

Jika pemfaktoran dan perkalian konjugasi tidak berhasil, coba aljabar dasar lainnya seperti penjumlahan atau pengurangan pecahan, perkalian atau pembagian pecahan, pembatalan, atau bentuk penyederhanaan lainnya.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x}$$

Evaluasi

1. **Coba substitusi.**

   Pasang 0: Itu memberi Anda $\frac{0}{0}$ — tidak bagus.

2. **Sederhanakan pecahan kompleks (yaitu pecahan besar yang mengandung pecahan kecil) dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan penyebut terkecil dari pecahan kecil, yaitu 4(x + 4).**

   Catatan: Penjumlahan atau pengurangan pecahan kecil pada pembilang atau penyebut juga berfungsi dalam jenis masalah ini, tetapi ini sedikit lebih lama daripada metode di sini.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}\right)}{x}\cdot\frac{4(x+4)}{4(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-(x+4)}{4x(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{4x(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4(x+4)}$$

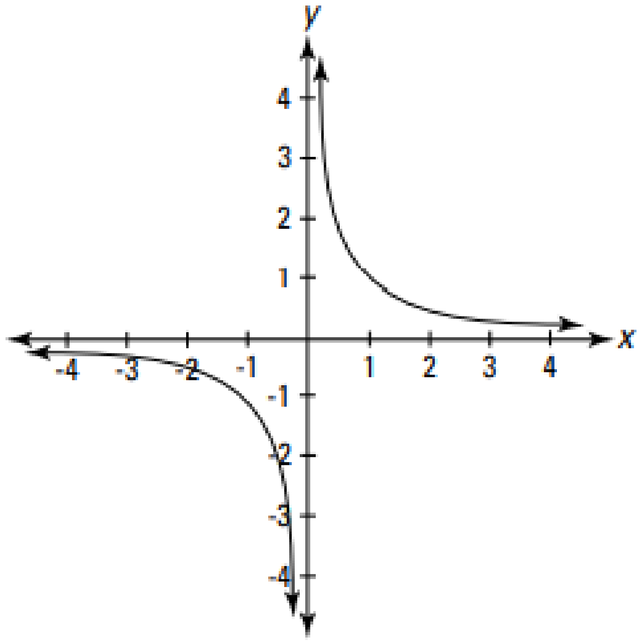
3. **Sekarang substitusi berfungsi.**

$$=\frac{-1}{4(0+4)}=-\frac{1}{16}$$

3.4 BATAS DI INFINITY

Pada limit di bagian terakhir, x mendekati bilangan berhingga, tetapi ada juga limit di mana x mendekati tak hingga atau tak hingga negatif. Pertimbangkan fungsinya $f(x)=\frac{1}{x}$. Lihat Gambar 3-1.

Anda dapat melihat pada grafik (di kuadran pertama) bahwa saat x semakin besar — dengan kata lain, saat x mendekati tak terhingga — ketinggian fungsi semakin rendah tetapi tidak pernah menjadi nol. Ini dikonfirmasi dengan mempertimbangkan apa yang terjadi ketika Anda memasukkan angka yang lebih besar dan lebih besar ke $\frac{1}{x}$. Output menjadi lebih kecil dan lebih kecil. Grafik ini memiliki asimtot horizontal y = 0 (sumbu x), dan kita katakan bahwa $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Fakta bahwa x tidak pernah benar-benar mencapai tak terhingga dan bahwa f tidak pernah mencapai nol tidak memiliki relevansi. Ketika kita mengatakan bahwa $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, kita berarti bahwa x semakin besar dan besar tanpa akhir, f semakin dekat dan dekat ke nol. Fungsi f juga mendekati nol saat x mendekati tak terhingga negatif, ditulis sebagai $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.



Gambar 3-1: Grafik $f(x) = \frac{1}{x}$.

Asimtot Horisontal

Asimtot horizontal dan batas tak terhingga berjalan seiring — Anda tidak dapat memiliki satu tanpa yang lain. Untuk fungsi rasional seperti $(x) = \frac{3x-7}{2x+8}$, menentukan batas di tak terhingga atau negative tak terhingga sama dengan mencari lokasi asimtot horizontal.

Inilah yang Anda lakukan. Pertama, perhatikan derajat pembilang (itu pangkat tertinggi x dalam pembilang) dan derajat penyebut. Anda punya tiga kasus:

- ✓ Jika derajat pembilang lebih besar dari derajat penyebut, misalnya $f(x) = \frac{6x^4 + x^3 - 7}{2x^2 + 8}$, tidak ada asimtot horizontal dan limit fungsi saat x mendekati tak hingga (atau tak hingga negatif) tidak ada.
- ✓ Jika derajat penyebut lebih besar dari derajat pembilang, misalnya $g(x) = \frac{4x^2 - 9}{x^3 + 12}$, sumbu x (garis y = 0) adalah asimtot horizontal dan $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$
- ✓ Jika derajat pembilang dan penyebutnya sama, ambil koefisien pangkat tertinggi x pada pembilang dan bagi dengan koefisien pangkat tertinggi x pada penyebut. Hasil bagi itu memberi Anda jawaban untuk masalah batas dan tinggi asimtot. Misalnya, jika $h(x) = \frac{4x^3 - 10x + 1}{5x^3 + 3x^2 - x}$, $\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} h(x) = \frac{4}{5}$ dan h memiliki asimtot horizontal pada $y = \frac{4}{5}$

Pergantian tidak bekerja untuk masalah di bagian ini. Jika Anda mencoba memasukkan x di salah satu fungsi rasional di bagian ini, Anda mendapatkan $\frac{\infty}{\infty}$, tetapi itu tidak sama dengan 1. Hasil dari $\frac{\infty}{\infty}$ tidak memberi tahu Anda apapun tentang jawaban untuk masalah batas.

Memecahkan Batas Di Tak Terhingga

Mari kita coba beberapa aljabar untuk masalah ini $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$.

1. **Coba substitusi — selalu merupakan ide yang bagus.**

   Tidak baik. Anda mendapatkan , yang tidak sama dengan nol dan yang tidak memberi tahu Anda apa pun (lihat Peringatan terkait di bagian sebelumnya). Ke rencana B.

   Karena $\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ mengandung akar kuadrat, metode perkalian konjugasi sepertinya merupakan pilihan yang wajar, kecuali metode itu digunakan untuk pecahan fungsi. Nah, taruh saja $\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ nomor 1 dan, voila, Anda mendapat pecahan: $\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}$. Sekarang lakukan perkalian konjugasi.

2. **Kalikan pembilang dan penyebutnya dengan konjugasi dari $\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ dan sederhanakan.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

(Batalkan pembilangnya. Kemudian faktorkan x dari penyebutnya; ya, Anda salah dengar!)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}
\end{aligned}$$

3. **Sekarang substitusi berhasil.**

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

BAB 4
ORIENTASI DIFERENSIASI

Dalam Bab Ini

- Menemukan aljabar sederhana di balik kalkulus
- Menemukan turunan dari garis dan kurva
- Mengatasi masalah tangen dan hasil bagi perbedaan

Kalkulus diferensial adalah matematika perubahan dan bilangan sangat kecil. Anda mungkin mengatakan itu adalah matematika dari perubahan yang sangat kecil — perubahan yang terjadi setiap trilyun detik.

Tanpa kalkulus diferensial — jika Anda hanya memiliki aljabar, geometri, dan trigonometri — Anda terbatas pada matematika hal-hal yang tidak berubah atau yang berubah atau bergerak dengan laju yang tidak berubah. Ingat masalah-masalah dari aljabar? Satu kereta meninggalkan stasiun pada pukul 3 sore. pergi ke barat dengan kecepatan 80 mph. Dua jam kemudian kereta lain berangkat ke timur dengan kecepatan 50 mph Anda dapat menangani masalah seperti itu dengan aljabar karena kecepatan atau kecepatannya tidak berubah. Dunia kita, bagaimanapun, bukanlah salah satu dari tingkat yang tidak berubah — tingkat selalu berubah-ubah.

Pikirkan tentang menempatkan pria di bulan. Apollo 11 lepas landas dari landasan peluncuran yang bergerak (bumi berputar pada porosnya dan berputar mengelilingi matahari). Saat Apollo terbang semakin tinggi, gesekan yang disebabkan oleh atmosfer dan efek gravitasi bumi berubah tidak hanya setiap detik, tidak hanya setiap sepersejuta detik, tetapi setiap sepersekian detik yang sangat kecil. Berat pesawat ruang angkasa juga terus berubah saat membakar bahan bakar. Semua hal ini mempengaruhi kecepatan perubahan roket. Di atas semua itu, roket harus mengenai sasaran yang bergerak, bulan. Semua hal ini berubah, dan tingkat perubahannya berubah. Katakanlah roket itu melaju 1000 mph satu detik dan 1020 mph sedetik kemudian - selama satu detik itu, kecepatan roket benar-benar melewati jumlah kecepatan berbeda yang tak terbatas antara 1000 dan 1020 mph. Bagaimana Anda bisa melakukan matematika untuk hal-hal fana yang mengubah setiap bagian yang sangat kecil dari satu detik? Anda tidak dapat melakukannya tanpa diferensiasi.

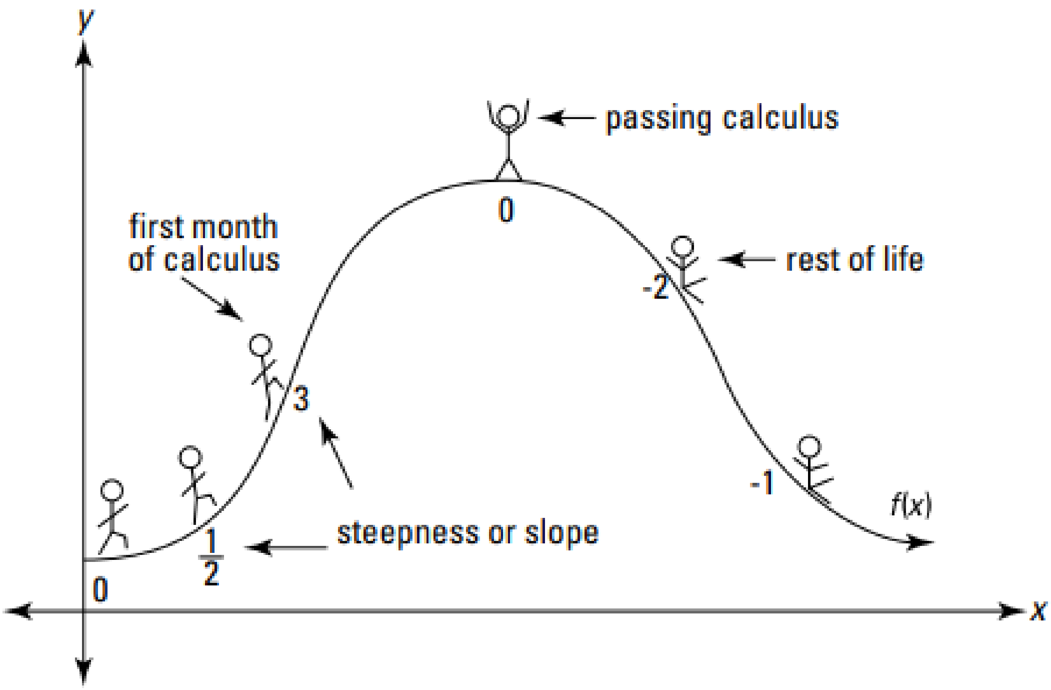
Kalkulus diferensial digunakan untuk semua jenis benda terrestrial demikian juga. Teori ekonomi modern, misalnya, bergantung pada diferensiasi. Dalam ekonomi, semuanya selalu berubah. Harga naik turun, penawaran dan permintaan berfluktuasi, dan inflasi terus berubah. Hal-hal ini terus berubah, dan cara mereka mempengaruhi satu sama lain terus berubah. Anda membutuhkan kalkulus untuk ini.

4.1 TURUNANNYA: HANYA KEMIRINGAN

Diferensiasi adalah yang pertama dari dua ide utama dalam kalkulus (yang lainnya adalah integrasi). Diferensiasi adalah proses menemukan turunan dari suatu fungsi seperti $y = x^2$. Turunannya hanyalah istilah kalkulus yang bagus untuk ide sederhana yang Anda ketahui dari aljabar: kemiringan. Kemiringan, seperti yang Anda tahu, adalah istilah aljabar mewah untuk kecuraman.

Dalam kalkulus diferensial, Anda mempelajari diferensiasi, yang merupakan proses menurunkan — itu menemukan — turunan. Ini adalah kata-kata besar untuk ide sederhana: menemukan kecuraman atau kemiringan garis atau kurva. Lemparkan beberapa istilah ini untuk mengesankan teman-teman Anda.

Perhatikan Gambar 4-1. Kecuraman 1/2 berarti bahwa saat stickman berjalan satu kaki ke kanan, dia naik 1/2 kaki; di mana kecuramannya 3, dia naik 3 kaki saat dia berjalan 1 kaki ke kanan. Di mana kecuramannya nol, dia berada di puncak, tidak naik atau turun; dan di mana kecuramannya negatif, dia akan turun. Kecuraman , misalnya, berarti dia turun 2 kaki untuk setiap kaki yang dia tuju ke kanan.



Gambar 4-1: Membedakan hanya berarti menemukan kecuraman atau kemiringan.

Kemiringan Garis

Sekarang Anda harus tahu bahwa kemiringan adalah inti dari diferensiasi. Pertimbangkan garis y = 2x + 3. Masukkan 1 ke x dan y sama dengan 5, yang memberi Anda titik yang terletak di (1, 5); masukkan 2 ke x dan y sama dengan 7, memberi Anda poin (2, 7); pasang 3 ke x dan y sama dengan 9, itulah intinya (3, 9), dan seterusnya. Sekarang mari kita hitung kemiringan garis (ya, saya menyadari bahwa y = mx + b memberi tahu saya bahwa kemiringannya adalah 2; bercanda saja). Ingat itu

$$Slope = \frac{rise}{run} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Naik adalah jarak vertikal antara dua titik, dan lari adalah jarak horizontal antara dua titik. Sekarang, ambil dua titik pada garis, katakanlah, (1, 5) dan (6, 15), dan hitung naik dan larinya. Anda naik 10 dari (1, 5) ke (6, 15) karena 5 ditambah 10 adalah 15. Dan Anda berlari melintasi 5 dari (1, 5) ke (6, 15) karena 1 ditambah 5 adalah 6. Selanjutnya, bagi untuk mendapatkan kemiringan:

$$Slope = \frac{rise}{run} = \frac{10}{5} = 2$$

Inilah cara Anda melakukan masalah yang sama menggunakan rumus kemiringan:

$$Slope = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Masukkan poin (1, 5) dan (6, 15):

$$Slope = \frac{15-5}{6-1} = 2$$

Turunan Dari Garis

Bagian sebelumnya menunjukkan aljabar kemiringan. Sekarang inilah kalkulus. Turunan (kemiringan) dari garis, y = 2x + 3 selalu 2, jadi Anda menulis

$\frac{dy}{dx} = 2$ (Baca dee y dee x sama dengan 2.)

Cara umum lain untuk menulis hal yang sama adalah

$y' = 2$(Baca y prima sama dengan 2.)

Dan anda katakan,

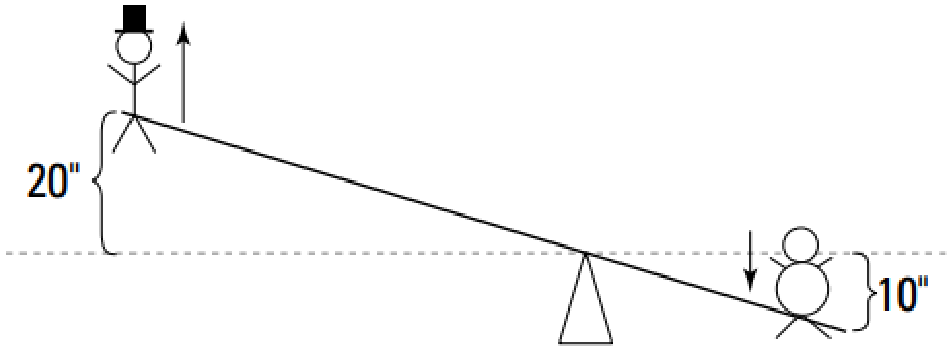
Turunan dari fungsi, y = 2x + 3, adalah 2.

4.2 DERIVATIF: INI HANYA TINGKAT

Berikut cara lain untuk memahami gagasan turunan yang bahkan lebih mendasar daripada konsep kemiringan: Turunan adalah laju. Jadi mengapa saya memulai bab dengan kemiringan? Karena kemiringan dalam beberapa hal adalah konsep yang lebih mudah dari kedua konsep tersebut, dan kemiringan adalah ide yang Anda kembalikan lagi dan lagi dalam buku ini dan buku teks kalkulus lainnya saat Anda melihat grafik dari lusinan fungsi. Tetapi sebelum Anda mendapatkan kemiringan, Anda memiliki tarif. Kemiringan adalah, dalam arti tertentu, gambaran dari suatu tingkat; tingkat datang pertama, gambar itu datang kedua. Sama seperti Anda dapat memiliki fungsi sebelum Anda melihat grafiknya, Anda dapat memiliki tingkat sebelum Anda melihatnya sebagai kemiringan.

Kalkulus Di Taman Bermain

Bayangkan Laurel dan Hardy dalam posisi terhuyung-huyung — lihat Gambar 4-2.



Gambar 4-2: Laurel dan Hardy — tidak menyadari implikasi kalkulus.

Dengan asumsi Hardy memiliki berat dua kali lipat dari Laurel, Hardy harus duduk dua kali lebih dekat ke tengah sebagai Laurel agar mereka dapat menyeimbangkan. Dan untuk setiap inci Hardy turun, Laurel naik dua. Jadi Laurel bergerak dua kali lebih banyak dari Hardy. Voila, Anda punya turunan!

Derivatif hanyalah ukuran seberapa banyak satu hal berubah dibandingkan dengan yang lain — dan itu adalah tingkat. Laurel bergerak dua kali lebih banyak dari Hardy, jadi Anda menulis

$$dL = 2dH$$

Secara longgar, dL dapat dianggap sebagai perubahan posisi Laurel, dan dH sebagai perubahan posisi Hardy. Anda dapat melihat bahwa jika Hardy turun 10 inci, maka dH adalah 10, dan karena dL sama dengan 2 kali dH, dL adalah 20 — jadi Laurel naik 20 inci. Membagi kedua sisi persamaan ini dengan dH memberi Anda

$$\frac{dL}{dH} = 2$$

Dan itulah turunan dari Laurel sehubungan dengan Hardy. (Dibaca sebagai, “dee L, dee H,” atau sebagai, “turunan dari L sehubungan ke H.") Fakta $\frac{dL}{dH} = 2$ itu berarti Laurel bergerak 2 kali lebih banyak dari Hardy. Laju gerakan Laurel adalah 2 inci per inci gerakan Hardy.

Sekarang mari kita lihat dari sudut pandang Hardy. Hardy bergerak setengah sebanyak Laurel, jadi kamu juga bisa menulis

$$dH = \frac{1}{2}\,dL$$

Membagi dengan dL memberi Anda

$$\frac{dH}{dL} = \frac{1}{2}$$

Ini adalah turunan dari Hardy sehubungan dengan Laurel, dan itu berarti Hardy bergerak inci untuk setiap inci gerakan Laurel. Jadi, kecepatan Hardy adalah inci per inci dari gerakan Laurel. Omong-omong, Anda juga bisa mendapatkan turunan ini dengan mengambil $\frac{dL}{dH} = 2$, yaitu sama seperti $\frac{dL}{dH} = \frac{2}{1}$, dan membaliknya terbalik untuk mendapatkan $\frac{dH}{dL} = \frac{1}{2}$.

Tarif 2 inci per inci dan $\frac{1}{2}$ inci per inci ini mungkin tampak aneh karena kita sering menganggap tarif mengacu pada sesuatu per satuan waktu, seperti mil per jam. Tapi tarif bisa apa saja per apa saja. Jadi, setiap kali Anda mendapatkan ini per itu, Anda punya tarif; dan jika Anda memiliki tarif, Anda memiliki turunan.

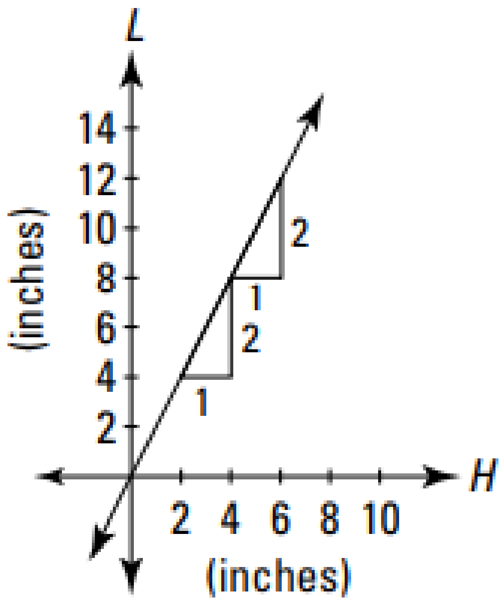
Tidak ada akhir untuk tarif berbeda yang mungkin Anda lihat: mil per galon (untuk jarak tempuh bahan bakar), galon per menit (untuk air yang mengalir keluar dari kolam), output per karyawan (untuk produktivitas pabrik), dan seterusnya. Tarif bisa konstan atau berubah. Dalam kedua kasus, setiap kurs adalah turunan, dan setiap turunan adalah kurs.

Koneksi Tingkat-Kemiringan

Tarif dan kemiringan memiliki hubungan yang sederhana. Contoh laju sebelumnya dapat digambarkan pada sistem koordinat xy, di mana setiap laju muncul sebagai kemiringan. Laurel bergerak dua kali lebih banyak dari Hardy dapat diwakili oleh persamaan berikut:

$$L = 2H$$

Gambar 4-3 menunjukkan grafik fungsi ini. Inci pada sumbu H menunjukkan seberapa jauh Hardy telah bergerak naik atau turun dari posisi awal jungkat-jungkit; inci pada sumbu L menunjukkan seberapa jauh Laurel telah bergerak naik atau turun. Garis naik 2 inci untuk setiap inci yang mengarah ke kanan, dan kemiringannya adalah $\frac{2}{1}$, atau 2. Ini adalah penggambaran visual dari $\frac{dL}{dH} = 2$, dan ini menunjukkan bahwa posisi Laurel berubah 2 kali lipat dari posisi Hardy.



Gambar 4-3: Grafik $L = 2H$.

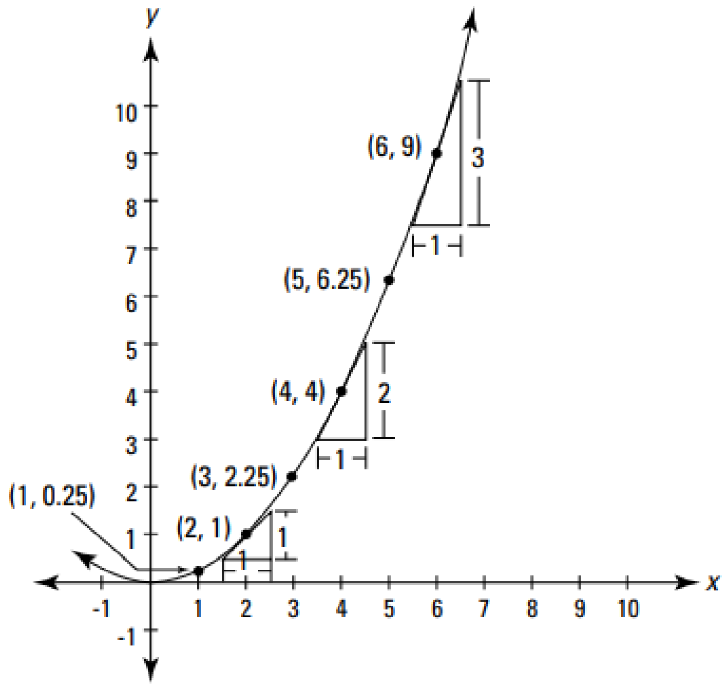
Satu komentar terakhir.Anda tahu bahwa $slope = \frac{rise}{run}$. Nah, Anda bisa menganggap *dL* sebagai kenaikan dan *dH* sebagai lari. Itu mengikat semuanya.

$$slope = \frac{rise}{run} = \frac{dL}{dH} = rate$$

Jangan lupa, turunan adalah kemiringan, dan turunan adalah tingkat.

4.3 TURUNAN DARI KURVA

Bagian sebelumnya dalam bab ini melibatkan linear fungsi — garis lurus dengan kemiringan yang tidak berubah. Tapi jika semua fungsi dan grafik adalah garis dengan kemiringan yang tidak berubah, tidak perlu kalkulus. Turunan dari fungsi Laurel dan Hardy yang digambarkan sebelumnya adalah 2, tetapi Anda tidak memerlukan kalkulus untuk menentukan kemiringan suatu garis. Kalkulus adalah matematika perubahan, jadi sekarang adalah waktu yang tepat untuk beralih ke parabola, kurva dengan kemiringan yang berubah. Gambar 4-4 adalah grafik parabola, $y = \frac{1}{4}x^2$.



Gambar 4-4: Grafik $y = \frac{1}{4}x^2$

Perhatikan bagaimana parabola menjadi semakin curam saat Anda pergi ke kanan. Anda dapat melihat dari grafik bahwa pada titik (2, 1), kemiringannya adalah 1; di (4, 4), kemiringannya adalah 2; pada (6, 9), kemiringannya adalah 3, dan seterusnya. Ternyata turunan dari fungsi ini sama $\frac{1}{2}x$ (saya tunjukkan bagaimana saya mendapatkannya dalam satu menit). Untuk menemukan kemiringan kurva di sembarang titik, Anda cukup memasukkan koordinat x dari titik tersebut ke turunan, $\frac{1}{2}x$, dan Anda mendapatkan kemiringannya.

Misalnya, jika Anda ingin kemiringan pada titik (3, 2.25), pasang 3 ke dalam x, dan kemiringannya adalah $\frac{1}{2}$ dikalikan 3, atau 1,5.

Berikut kalkulus. Anda menulis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x \text{ atau } y' = \frac{1}{2}x$$

Dan anda katakan

Turunan dari fungsi $y = \frac{1}{4}x^2$ adalah $\frac{1}{2}x$.

Saya berjanji untuk memberi tahu Anda cara menurunkan turunan dari $y = \frac{1}{4}x^2$:

1. **Ambil daya dan letakkan di depan koefisien.**

   $$2 \cdot \frac{1}{4}x^{2}$$

2. **Kalikan.**

   2 kali $\frac{1}{4}$ adalah $\frac{1}{2}$ sehingga memberi Anda $\frac{1}{2}x^2$

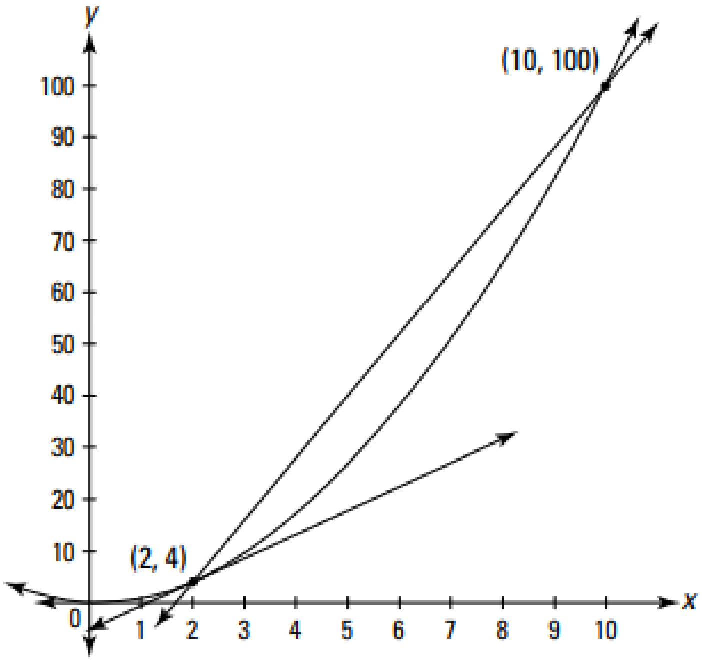
3. **Kurangi daya sebesar 1.**
   Dalam contoh ini 2 menjadi 1. Jadi turunannya adalah

   $\frac{1}{2}x^1$ atau hanya $\frac{1}{2}x$

4.4 HASIL BAGI PERBEDAAN

Membunyikan terompet! Anda sekarang sampai pada apa yang mungkin merupakan landasan kalkulus diferensial: hasil bagi perbedaan, jembatan antara batas dan turunannya. (Tetapi Anda harus bersabar di sini, karena saya perlu beberapa halaman untuk menjelaskan logika di balik hasil bagi perbedaan sebelum saya dapat menunjukkan kepada Anda apa itu.) Oke, jadi begini.

Anda tahu bahwa turunan hanyalah kemiringan. Anda tahu semua tentang kemiringan garis, dan pada Gambar 4-4, saya memberi Anda kemiringan parabola di beberapa titik dan menunjukkan jalan pintas untuk menemukan turunannya — tetapi saya mengabaikan matematika penting di tengah. . Matematika itu melibatkan batas dan hasil bagi perbedaan, dan membawa kita ke ambang kalkulus. Pegang topimu.



Gambar 4-5: Grafik $y = x^2$ dengan tangen dan sekan.

Untuk menghitung kemiringan, Anda memerlukan dua titik untuk dimasukkan ke dalam rumus kemiringan. Untuk garis, ini mudah. Anda tinggal memilih dua titik pada garis dan menghubungkannya. Tetapi katakanlah Anda menginginkan kemiringan parabola pada Gambar 4-5 pada titik (2, 4).

Anda dapat melihat garis yang ditarik bersinggungan dengan kurva di (2, 4), dan karena kemiringan tangen sama dengan kemiringan parabola di (2, 4), yang Anda butuhkan hanyalah kemiringan tan - garis halus. Tapi Anda tidak tahu persamaan tangen, jadi Anda tidak bisa mendapatkan titik kedua — selain (2, 4) — yang Anda perlukan untuk rumus kemiringan. Inilah cara para penemu kalkulus mengatasi hambatan ini. Gambar 4-5 juga menunjukkan sekan (garis yang memotong kurva di dua titik) yang memotong parabola di (2, 4) dan di (10, 100). Kemiringan sekan ini diberikan oleh rumus kemiringan:

$$Slope = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 4}{10 - 2} = \frac{96}{8} = 12$$

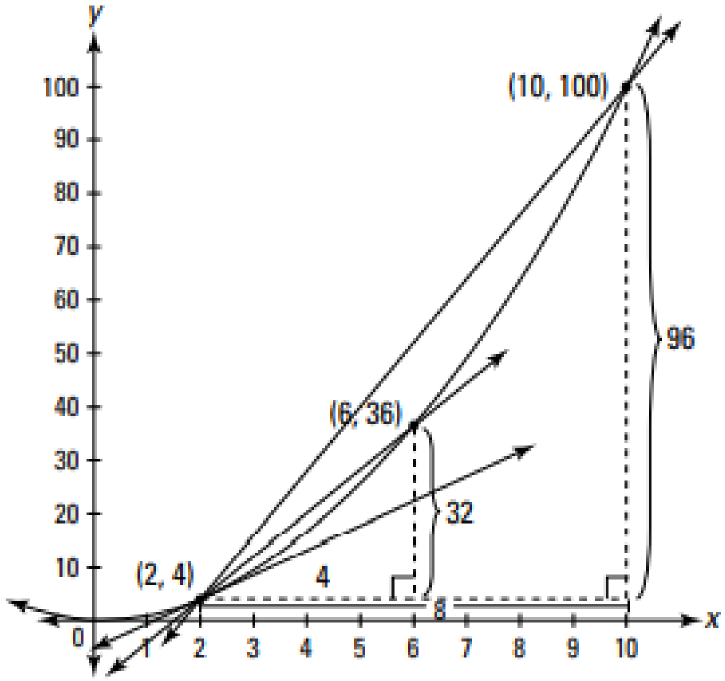
Sekan ini sedikit lebih curam daripada tangen, jadi kemiringan sekan, 12, lebih tinggi dari kemiringan yang Anda cari.

Sekarang tambahkan satu titik lagi di (6, 36) dan gambar sekan lainnya menggunakan titik itu dan (2, 4) lagi. Lihat Gambar 4-6.

Hitung kemiringan sekan kedua ini:

$$Slope = \frac{36 - 4}{6 - 2} = \frac{32}{4} = 8$$

Anda dapat melihat bahwa sekan ini adalah pendekatan yang lebih baik dari tangen daripada sekan pertama. Sekarang, bayangkan apa yang akan terjadi jika Anda meraih titik di (6, 36) dan menggesernya ke bawah parabola menuju (2, 4), menyeret sekan bersamanya. Dapatkah Anda melihat bahwa ketika titik semakin dekat ke (2, 4), sekan semakin dekat dan dekat ke tangen, dan bahwa kemiringan sekan ini semakin dekat dengan kemiringan tangen?



Gambar 4-6: Grafik $y = x^2$ dengan tangen dan dua sekan.

Jadi, Anda bisa mendapatkan kemiringan tangen jika Anda mengambil batas kemiringan sekan yang bergerak ini. Mari kita beri titik bergerak koordinat (x_2, y_2) . Saat titik ini (x_2, y_2) meluncur lebih dekat dan lebih dekat ke (x_1, y_1), yaitu (2, 4), run — yaitu $(x_2 - x_1)$— semakin dekat dan mendekati nol. Jadi, inilah batas yang Anda butuhkan:

$$\begin{aligned} Slope_{\text{of tangent}} &= \lim_{\substack{\text{as point slides} \\ \text{toward } (2,\,4)}} \left(slope_{\text{of moving secant}} \right) \\ &= \lim_{run \to 0} \frac{rise}{run} \\ &= \lim_{run \to 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \lim_{run \to 0} \frac{y_2 - 4}{x_2 - 2} \end{aligned}$$

Perhatikan apa yang terjadi pada batas ini ketika Anda memasukkan tiga titik lagi pada parabola yang semakin dekat ke (2, 4):

Ketika titik (x_2, y_2) meluncur ke (2.1, 4.41), kemiringannya adalah 4.1.
Ketika titik meluncur ke (2,01, 4,0401), kemiringannya adalah 4,01.

Ketika titik meluncur ke (2.001, 4.004001), kemiringannya adalah 4,001.

Tentu terlihat seperti kemiringan menuju ke 4.

Seperti semua masalah limit, variabel dalam masalah ini, run, mendekati tetapi tidak pernah benar-benar mencapai nol. Jika mencapai nol — yang akan terjadi jika Anda menggeser titik yang Anda ambil di sepanjang parabola hingga benar-benar berada di atas (2, 4) — Anda akan memiliki kemiringan $\frac{0}{0}$, yang tidak terdefinisi. Tapi tentu saja, itulah kemiringan yang Anda inginkan — kemiringan garis ketika titik mendarat di atas (2, 4). Di sinilah letak keindahan proses limit. Dengan batas ini, Anda mendapatkan yang tepat kemiringan tangen meskipun fungsi batas, $\frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}$, menghasilkan kemiringan sekan.

Di sini lagi adalah persamaan untuk kemiringan tangen:

$$Slope_{at\,(2,\,4)} = \lim_{run \to 0} \frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}$$

Dan kemiringan tangen adalah — ya — turunannya. Turunan suatu fungsi pada suatu bilangan x = c, ditulis , adalah kemiringan tangen ke f yang ditarik di c.

Fraksi kemiringan $\frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}$ dinyatakan dengan terminologi aljabar. Sekarang mari kita tulis ulang untuk memberikan tampilan kalkulus yang salah. Tapi pertama-tama, akhirnya, definisi yang Anda tunggu-tunggu:

Definisi Hasil Bagi Perbedaan: Ada istilah kalkulus untuk fraksi kemiringan umum, $\frac{rise}{run}$ atau $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, jika Anda menulisnya dengan cara kalkulus yang bagus. Pecahan adalah hasil bagi, Baik? Dan keduanya $y_2 - y_1$ dan $x_2 - x_1$ perbedaan, kan? Jadi, voila, itu disebut hasil bagi perbedaan. Ini dia:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dalam dua halaman berikutnya saya menunjukkan kepada Anda bagaimana $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ berubah menjadi hasil bagi perbedaan.

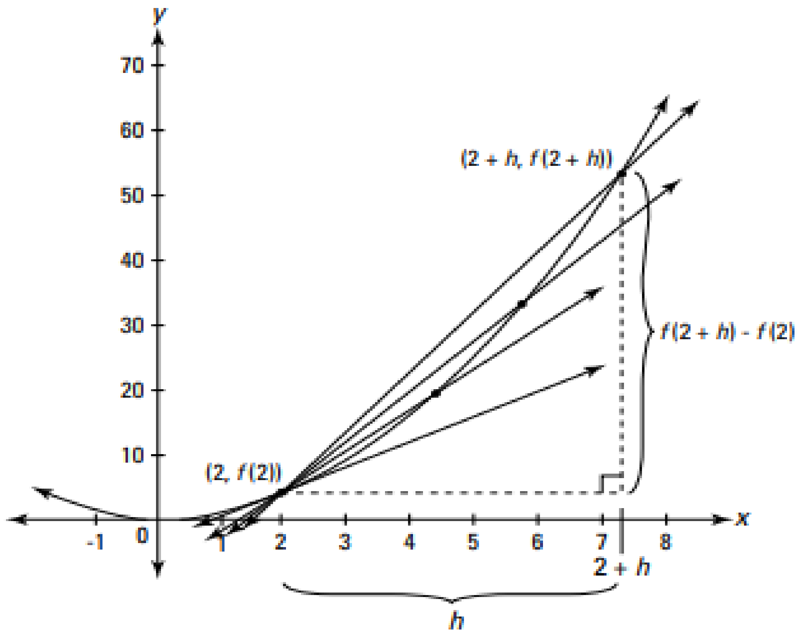
Oke, mari kita lay out proses morphing ini. Pertama, lari, (dalam contoh ini, $x_2 - 2$), disebut — don't ask me why — h. Selanjutnya, karena $x_1 = 2$ dan run sama dengan h, sama dengan 2 + h. Anda kemudian menulis y_1 sebagai $f(2)$ dan y_2 sebagai $f(2 + h)$. Membuat semua substitusi memberi Anda turunan dari x^2 di x = 2:

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{run \to 0} \frac{rise}{run} \\
&= \lim_{x_2 \to 2} \frac{y_2 - 4}{x_2 - 2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

hanyalah langkah tangga $\frac{rise}{run}$ yang menyusut yang dapat Anda lihat pada Gambar 4-6 saat titik meluncur ke bawah parabola menuju (2, 4).

Gambar 4-7 seperti Gambar 4-6 kecuali bahwa alih-alih titik yang tepat seperti (6, 36) dan (10, 100), titik geser memiliki koordinat umum $(2 + h, f(2 + h))$ dan kenaikan dan laju dinyatakan dalam h.



Gambar 4-7: Grafik $y = x^2$ yang menunjukkan bagaimana suatu limit menghasilkan kemiringan tangen di (2, 4).

Melakukan matematika memberi Anda kemiringan tangen di (2, 4):

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-(2)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(4+4h+h^2\right)-4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(4+h) \\
&= 4+0
\end{aligned}
$$

Jadi kemiringannya adalah 4. (Omong-omong, hanya kebetulan bahwa kemiringan di (2, 4) kebetulan sama dengan koordinat y dari titik tersebut.)

Definisi Turunan: Jika Anda mengganti titik $(2, f(2))$ dalam persamaan limit di atas dengan titik umum $(x, f(x))$, Anda mendapatkan definisi umum turunan sebagai fungsi dari x:

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}
$$

Jadi akhirnya Anda melihat bahwa turunan didefinisikan sebagai batas hasil bagi perbedaan.

Sekarang kerjakan limit ini dan dapatkan turunan untuk parabola $f(x) = x^2$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(x^2+2xh+h^2\right)-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h) \\
&= 2x+0 \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

Jadi untuk parabola ini, turunannya — yaitu kemiringan tangen — sama dengan 2x. Masukkan sembarang angka ke x, dan Anda mendapatkan kemiringan parabola pada nilai x itu! Cobalah.

4.5 TARIF RATA-RATA DAN SEKETIKA

Kembali sekali lagi ke hubungan antara kemiringan dan laju, kemiringan hanyalah penggambaran visual dari laju: Kemiringan, $\frac{rise}{run}$, hanya memberitahu Anda tingkat di mana y berubah dibandingkan dengan x. Jika, misalnya, y adalah jumlah mil dan x adalah jumlah jam, Anda mendapatkan tingkat mil per jam yang sudah dikenal.

Setiap sekan pada Gambar 4-6 memiliki kemiringan yang diberikan oleh rumus $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Kemiringan itu adalah tingkat rata-rata selama interval dari x_1 hingga x_2. Jika y dalam mil dan x dalam jam, Anda mendapatkan rata-ratanya kecepatan dalam mil per jam selama selang waktu dari x_1 hingga x_2 .

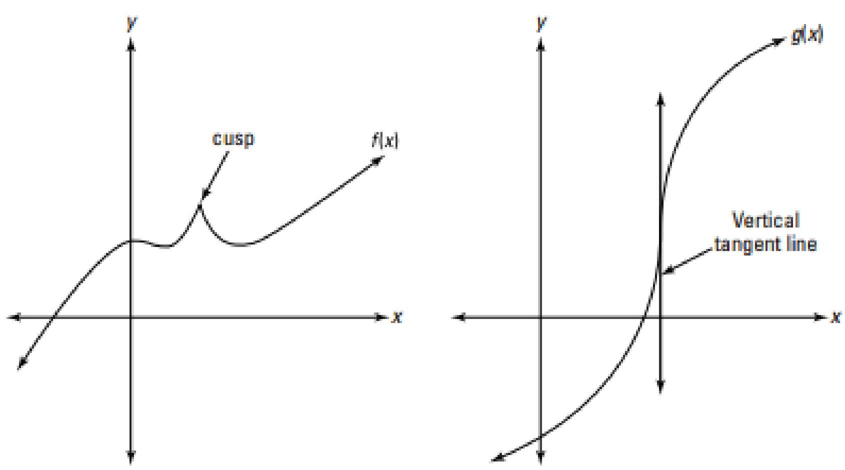
Ketika Anda mengambil batas dan mendapatkan kemiringan tangen, Anda mendapatkan tingkat sesaat di titik (x_1, y_1) . Sekali lagi, jika y dalam mil dan x dalam jam, Anda mendapatkan kecepatan sesaat pada titik waktu, x_1 . Karena kemiringan tangen adalah turunan, ini memberi kita definisi lain dari turunan.

Turunan dari suatu fungsi $f(x)$ pada beberapa nilai x adalah laju perubahan sesaat dari f terhadap x pada nilai tersebut.

4.6 TIGA KASUS DIMANA DERIVATIF TIDAK ADA

Sekarang Anda tentu tahu bahwa turunan dari suatu fungsi pada suatu titik tertentu adalah kemiringan tangen pada titik tersebut. Jadi, jika Anda tidak dapat menggambar tangen, tidak ada turunan — yang terjadi dalam dua kasus. Dalam kasus ketiga, ada tangen, tetapi kemiringannya dan turunannya tidak terdefinisi:

1. Tidak ada tangen dan karenanya tidak ada turunan pada jenis diskontinuitas apa pun: tak terbatas, dapat dilepas, atau melompat. Kontinuitas, oleh karena itu, merupakan kondisi yang diperlukan untuk diferensiasi. Namun, itu bukan kondisi yang cukup seperti yang ditunjukkan dua kasus berikutnya. Galilah ahli logika itu.
2. Tidak ada tangen dan dengan demikian tidak ada turunan di sudut tajam pada suatu fungsi (atau pada titik puncak, belokan yang benar-benar runcing dan tajam). Lihat fungsi f pada Gambar 4-8.
3. Dimana suatu fungsi memiliki titik belok vertikal (lihat fungsi g), kemiringannya tidak terdefinisi dan dengan demikian turunannya tidak ada.



Gambar 4-8: Kasus 2 dan 3 di mana tidak ada turunan.

BAB 5
ATURAN DIFERENSIASI

Dalam Bab Ini

- Menguasai aturan diferensiasi dasar
- Lulus ke aturan ahli
- Membedakan fungsi invers

Dalam bab ini saya memberikan teknik jalan pintas untuk menemukan turunan yang menghindari kesulitan batas dan hasil bagi perbedaan. Kemudian, setelah Anda menyerap materi yang agak membosankan ini, Bab 6 dan 7 menunjukkan kepada Anda bagaimana menggunakan turunan untuk menyelesaikan segala macam masalah yang menarik.

5.1 ATURAN DIFERENSIASI DASAR

Kalkulus bisa jadi sulit, tetapi Anda tidak akan pernah tahu jika dilihat dari bagian ini. Mempelajari beberapa aturan dasar ini sangat mudah.

Aturan konstan

Ini sederhana. $f(x) = 5$ adalah garis horizontal dengan kemiringan nol, dan dengan demikian turunannya juga nol. Jadi, untuk sembarang bilangan c, jika $f(x) = c$, maka $f'(x) = 0$. Atau Anda bisa menulis $\frac{d}{dx}c = 0$ Akhir dari cerita.

Aturan kekuasaan

Mengatakan $f(x) = x^5$. Untuk mencari turunannya, ambil pangkat, 5, bawa ke depan x, dan kurangi pangkatnya dengan 1 (dalam contoh ini, pangkat menjadi 4). Itu memberi Anda $f(x) = 5x^4$. Sepotong kue.

Dalam Bab 4, saya membedakan $y = x^2$ dengan hasil bagi perbedaan. Dibutuhkan delapan baris matematika untuk melakukannya. Alih-alih semua itu, gunakan saja aturan kekuatan: Bawa 2 di depan, kurangi kekuatan 1, yang membuat Anda memiliki kekuatan 1 yang bisa Anda jatuhkan (karena kekuatan 1 tidak menghasilkan apa-apa). Dengan demikian,

$$y = x^2$$
$$y' = 2x$$

Setelah Anda mengetahui cara pintas yang bagus seperti ini, Anda akan jarang menggunakan hasil bagi perbedaan. Jadi mengapa repot-repot mempelajari semua hal tentang perbedaan yang sulit itu? Nah, perbedaan bagi hasil disertakan dalam setiap buku dan kursus kalkulus karena ini memberi Anda pemahaman yang lebih lengkap dan kaya tentang kalkulus dan fondasinya — anggap itu sebagai pembangun karakter matematika. Atau karena guru matematika sadis. Anda menjadi hakim.

Aturan pangkat berlaku untuk pangkat positif, negatif, dan pecahan.

$$\text{If } f(x) = x^{-2} \text{ then } f'(x) = -2x^{-3}$$
$$\text{If } g(x) = x^{2/3} \text{ then } g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$
$$\text{If } h(x) = x \text{ then } h'(x) = 1$$

Pastikan Anda ingat bagaimana melakukan fungsi terakhir. Ini adalah fungsi yang paling sederhana, namun masalah yang paling mudah untuk dilewatkan. Anda dapat mengingat bahwa turunan dari x adalah 1. Atau lakukan seperti ini: Tulis ulang $h(x) = x$ sebagai $h(x) = x^1$ dan kemudian terapkan aturan pangkat: Bawa 1 di depan dan kurangi pangkat 1 menjadi nol, memberi Anda $h'(x) = 1x^0$. Karena x^0 sama dengan 1, Anda punya $h'(x) = 1$.

Anda dapat membedakan fungsi radikal dengan menulis ulang sebagai fungsi daya dan kemudian menggunakan aturan daya. Misalnya, jika $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, tulis ulang sebagai $f(x) = x^{2/3}$ dan gunakan aturan pangkat. Anda juga dapat menggunakan aturan daya untuk membedakan fungsi seperti $(x) = \frac{1}{x^3}$. Tulis ulang ini sebagai $f(x) = x^{-3}$ dan gunakan aturan kekuatan.

Aturan kelipatan konstan

Bagaimana jika fungsi yang Anda diferensiasikan dimulai dengan koefisien? Tidak ada bedanya. Sebuah koefisien tidak berpengaruh pada diferensiasi. Abaikan saja dan bedakan menurut aturan yang sesuai. Koefisien tetap di tempatnya sampai langkah terakhir ketika Anda menyederhanakan jawaban Anda dengan mengalikannya dengan koefisien.

Bedakan $= 4x^3$.

Solusi: Anda tahu dengan aturan pangkat bahwa turunan dari x^3. Adalah $3x^3$. , sehingga turunan dari $4(x^3)$ adalah $4(3x^2)$.. 4 hanya duduk di sana tanpa melakukan apa-apa. Kemudian, sebagai langkah terakhir, sederhanakan: $12x^2$ equals y'. Jadi $12x^2$.

Bedakan y = 5x.

Solusi: Ini adalah garis berbentuk y = mx + b dengan m = 5, jadi kemiringannya adalah 5 dan turunannya adalah 5: $y' = 5$. (Terkadang penting untuk berpikir secara grafis seperti ini.) Tapi Anda juga bisa menyelesaikannya dengan aturan kekuasaan. $\frac{d}{dx} x^1 = 1x^0$; jadi $\frac{d}{dx} 5(x^1) = 5(1) = 5$.

Singkatnya, aturan kelipatan konstan mengambil fungsi seperti $(x) = 10\ (stuff)$, membedakan barang — bahwa $stuff'$ — sementara 10 hanya tinggal diam. Jadi, jika $g(x) = 15\ (stuff)$, maka $g'(x) = 15\ (stuff')$.

Jangan lupa bahwa π(~3.14) dan e(~2.72) adalah bilangan, bukan variabel, sehingga berperilaku seperti bilangan biasa. Konstanta dalam masalah, seperti c dan k, juga berperilaku seperti bilangan biasa.

Jadi, jika $y = \pi x, y' = \pi$ — ini bekerja persis seperti mendiferensiasikan y = 5x. Dan karena π^3 hanya sebuah angka, jika $y = \pi^3$ maka $y' = 0$ — ini bekerja persis seperti membedakan y = 10. Anda juga akan melihat masalah yang berisi konstanta seperti c dan k. Pastikan untuk memperlakukan mereka seperti nomor biasa. Misalnya turunan dari $y = 5x + 2k^3$(di mana k adalah konstanta) adalah 5, bukan $5 + 6k^2$.

Aturan jumlah dan selisih

Jika Anda menginginkan turunan dari sejumlah suku, ambil turunan dari setiap suku secara terpisah.

Apa $f'(x)$ jika $f(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x + 10?$?

Cukup gunakan aturan pangkat untuk masing-masing dari empat suku pertama dan aturan konstan untuk suku terakhir. Dengan demikian, $f'(x) = 6x^5 + 3x^2 + 2x + 1$

Jika Anda memiliki selisih (itu pengurangan) alih-alih jumlah, tidak ada bedanya. Anda masih membedakan masing-masing. Dengan demikian, jika $y = 3x^5 - x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x,$, kemudian $y' = 15x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 5.$

5.2 MEMBEDAKAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Saya mendapat kehormatan tinggi dan hak istimewa yang berbeda untuk memperkenalkan Anda pada turunan dari enam fungsi trigonometri.

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

Pastikan Anda mengingat turunan untuk sinus dan kosinus — sangat mudah. Anda harus mempelajari empat lainnya juga, tetapi jika Anda takut bahwa pengetahuan ini akan melampaui tanggal Pertempuran Hastings (1066), Anda dapat menggunakan perangkat mnemonic bagus yang saya buat berikut.

Bayangkan Anda sedang mengikuti tes dan tidak dapat mengingat keempat turunan ini. Kamu mencondongkan tubuh ke pria di sebelahmu dan berbisik, "Psst, hei apa turunan dari cscx?" Sekarang, ambil tiga huruf terakhir dari psst (sst) — itu adalah huruf awal dari sec, sec, tan. Tuliskan ketiganya, dan di bawahnya tuliskan kofungsinya: csc, csc, cot. Beri tanda negatif pada csc di tengah. Terakhir, tambahkan panah seperti pada diagram berikut.

$$\begin{array}{ccccc} \sec & \rightarrow & \sec & \leftarrow & \tan \\ \csc & \rightarrow & -\csc & \leftarrow & \cot \end{array}$$

Detik di sebelah kiri memiliki panah yang menunjuk ke detik tan — jadi turunan dari secx adalah secx tanx. Tan di sebelah kanan memiliki panah yang menunjuk ke detik detik, jadi turunan dari tanx adalah $sec^2 x$. Baris bawah bekerja sama kecuali kedua turunannya negatif. Percaya atau tidak, trik ini mudah diingat.

5.3 FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA

Jika Anda tidak dapat mengingat aturan berikutnya, tutup kalkulator Anda.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Itu benar, turunan dari e^x itu sendiri! Ini adalah fungsi khusus. e^x dan kelipatannya, seperti $5e^x$, adalah satu-satunya fungsi yang merupakan turunannya sendiri.

Jika basis adalah angka selain e, Anda harus mengubah turunannya dengan mengalikannya dengan log natural dari basis:

Jika $y = 2^x$ kemudian $y' = 2^x \, In\, 2$.
Jika $y = 10^x$ kemudian $y' = 10^x \, In\, 10$.

Berikut turunan dari natural log:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Jika basis log adalah angka selain e, Anda mengubah turunan ini — seperti halnya fungsi eksponensial — kecuali Anda membagi dengan log alami dari basis alih-alih mengalikan:

$$\frac{d}{dx}\log_2 x = \frac{\frac{1}{x}}{\ln 2} = \frac{1}{x\ln 2}, \text{ and}$$
$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x\ln 10} \qquad \text{(Recall that } \log_{10}x \text{ is written without the 10.)}$$

5.4 ATURAN TURUNAN UNTUK PAKAR

Aturan-aturan ini, terutama aturan rantai, bisa jadi agak sulit.

Aturan produk dan hasil bagi

Aturan Produk (untuk produk (duh) dari dua fungsi):

$$\text{If } y = \textit{this} \cdot \textit{that},$$
$$\text{then } y' = \textit{this}' \cdot \textit{that} + \textit{this} \cdot \textit{that}'$$

Sehingga untuk

$$y = x^3 \cdot \sin x,$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^3\right)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' \\ &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x \end{aligned}$$

Aturan Hasil Bagi (bertaruh Anda bisa menebak untuk apa ini):

$$\text{If } y = \frac{top}{bottom},$$

$$\text{then } y' = \frac{top' \cdot bottom - top \cdot bottom'}{bottom^2}$$

Sebagian besar buku kalkulus memberikan aturan ini dalam bentuk yang sedikit berbeda yang lebih sulit untuk diingat. Dan beberapa memberikan "mnemonic" yang melibatkan kata lodeehi dan hideelo atau hodeehi dan hideeho, yang mudah dicampuradukkan — bagus, terima kasih banyak.

Hafalkan aturan hasil bagi seperti yang saya tulis. Anda akan mengingat apa yang masuk dalam penyebut — tidak ada yang pernah melupakannya. Caranya adalah dengan mengetahui urutan suku-suku di pembilangnya. Anggap saja seperti ini: Anda sedang melakukan turunan, jadi hal pertama yang Anda lakukan adalah mengambil turunan. Tempat alami untuk memulai adalah di bagian atas pecahan. Jadi aturan hasil bagi dimulai dengan turunan dari atas. Ingat itu, dan pembilang lainnya hampir otomatis.

Berikut turunan dari

$y = \frac{\sin x}{x^4}$:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cdot x^4 - \sin x \cdot \left(x^4\right)'}{\left(x^4\right)^2} \\ &= \frac{x^4 \cos x - 4x^3 \sin x}{x^8} \\ &= \frac{x^3(x \cos x - 4 \sin x)}{x^8} \\ &= \frac{x \cos x - 4 \sin x}{x^5} \end{aligned}$$

Aturan rantai

Aturan rantai sejauh ini merupakan aturan turunan yang paling sulit, tetapi tidak terlalu buruk jika Anda fokus pada beberapa hal poin penting. Mari kita mulai dengan membedakan $y = \sqrt{4x^3 - 5}$. Anda menggunakan aturan rantai di sini karena Anda memiliki fungsi komposit, yaitu satu fungsi $(4x^3 - 5)$di dalam fungsi lain (fungsi akar kuadrat).

Inilah salah satu cara untuk mengenali fungsi komposit dengan cepat. $y = \sqrt{x}$ bukan fungsi komposit karena argumen dari akar kuadrat — hal yang Anda ambil akar kuadratnya —

adalah cukup x. Setiap kali argumen suatu fungsi adalah apa pun selain x lama biasa, Anda mendapatkan fungsi komposit. Berhati-hatilah untuk membedakan fungsi komposit dari sesuatu seperti $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$, yang merupakan produk dari dua fungsi, $\sqrt{x}$ dan sin x, yang masing-masing hanya memiliki x sebagai argumennya.

Oke, jadi Anda mendapatkan fungsi gabungan ini, $= \sqrt{4x^3 - 5}$.. Berikut cara membedakannya dengan aturan rantai.

1. **Anda mulai dengan fungsi luar,$\sqrt{\ }$, dan membedakannya, MENGABAIKAN apa yang ada di dalamnya. Untuk memastikan Anda mengabaikan bagian dalam, ganti sementara fungsi bagian dalam dengan kata barang.**
   Jadi Anda punya $y = \sqrt{stuff}$. Oke, sekarang bedakan $y = \sqrt{stuff}$ dengan cara yang sama seperti Anda membedakan $y = \sqrt{x}$.
   Karena $y = \sqrt{x}$ sama dengan $y = x^{1/2}$, aturan kekuatan memberi Anda $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$.
   Jadi untuk masalah ini, Anda mulai dengan $\frac{1}{2}stuff^{-1/2}$.
2. **Kalikan hasil dari Langkah 1 dengan turunan dari fungsi dalam $stuff'$.**

$$y' = \frac{1}{2}stuff^{-1/2} \cdot stuff'$$

   Perhatikan baik-baik ini. Semua masalah aturan rantai dasar mengikuti format ini. Anda melakukan aturan turunan untuk fungsi luar, mengabaikan bagian dalam, lalu mengalikannya dengan turunan barang.
3. **Bedakan hal-hal di dalam.**
   Hal-hal dalam dalam masalah ini adalah $4x^3 - 5$, dan turunannya adalah $12x^2$ dengan aturan kekuasaan.
4. **Sekarang kembalikan barang asli dan turunannya ke tempatnya.**

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}\left(4x^3-5\right)^{-1/2}\left(12x^2\right) \\ &= 6x^2\left(4x^3-5\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Atau, jika Anda menentang kekuatan negatif,

$$y' = \frac{6x^2}{\left(4x^3-5\right)^{1/2}}.$$

. Atau, jika Anda menentang sesuatu

kekuatan pecahan, $y' = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3-5}}.$

Mari kita bedakan fungsi komposit lainnya: $y = \sin\left(x^2\right)$.

1. **Fungsi luar adalah fungsi sinus, jadi Anda mulai dari sana, mengambil turunan dari sinus dan mengabaikan bagian dalam, x^2. Turunan dari sin x adalah cos x, jadi untuk soal ini, Anda mulai dengan**

   $\cos(\textit{stuff})$
2. **Kalikan turunan fungsi luar dengan turunan barang.**

   $y' = \cos(\textit{stuff}) \cdot \textit{stuff}'$
3. **Hal-hal dalam masalah ini adalah x^2.\, begitu juga $stuff'$ adalah 2x. Saat Anda memasang kembali istilah-istilah ini, Anda mendapatkan**

   $$\begin{aligned} y' &= \cos\left(x^2\right) \cdot 2x \\ &= 2x\cos\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Terkadang mencari tahu fungsi mana yang ada di dalamnya bisa menjadi rumit — terutama ketika suatu fungsi ada di dalam yang lain dan kemudian keduanya berada di dalam sepertiga (Anda dapat memiliki empat atau lebih fungsi bersarang, tetapi tiga mungkin yang paling banyak Anda lihat).

Tulis ulang fungsi komposit dengan satu set tanda kurung di sekitar setiap fungsi di dalam, dan tulis ulang fungsi trigonometri seperti $sin^2 x$ dengan kekuatan di luar satu set tanda kurung: $(sin\ x)^2$.

Misalnya — ini sulit — membedakan $y = \sin^3\left(5x^2 - 4x\right)$. Pertama, tulis ulang fungsi sinus pangkat tiga $y = \left(\sin\left(5x^2 - 4x\right)\right)^3$. Sekarang mudah untuk melihat urutan fungsi yang disarangkan. Fungsi terdalam ada di dalam kurung terdalam — yaitu . Selanjutnya, fungsi sinus ada di himpunan berikutnya dari kurung — itu $5x^2 - 4x$. Terakhir, fungsi cubing berada di luar segalanya — yaitu (Apakah Anda memperhatikan bahwa barang-barang di berbeda dari barang-barang di ? Saya akui ini cukup tidak matematis, tapi jangan khawatir. Saya hanya menggunakan istilah barang untuk merujuk pada apa pun yang ada di dalam fungsi apa pun.) Sekarang Anda tahu urutan fungsi, Anda membedakan dari luar ke dalam.

1. **Fungsi terluar adalah dan turunannya diberikan oleh aturan pangkat.**

   $$3\textit{stuff}^2$$
2. **Seperti semua masalah aturan rantai, kalikan dengan**

   $$3\textit{stuff}^2 \cdot \textit{stuff}'$$
3. **Sekarang letakkan barang, , kembali ke tempatnya.**

   $$3\left(\sin\left(5x^2 - 4x\right)\right)^2 \cdot \left(\sin\left(5x^2 - 4x\right)\right)'$$

4. **Gunakan aturan rantai lagi.**
   Anda tidak dapat menyelesaikan ini dengan cepat hanya dengan mengambil turunan sederhana karena Anda harus mendiferensiasikan fungsi komposit lainnya, $\sin\,(5x^2 - 4x)$. Perlakukan saja , $\sin\,(5x^2 - 4x)$ seolah-olah itu adalah masalah asli dan ambil turunannya. Turunan dari sin x adalah cos x, jadi turunan dari $\sin(stuff)$. dimulai dengan $stuff'$. Kalikan itu dengan $stuff$. Jadi, turunan dari adalah

$$\cos(stuff) \cdot stuff'$$

5. **Hal-hal untuk langkah ini adalah dan turunannya adalah 10x – 4. Pasang kembali hal-hal itu.**

$$\cos\left(5x^2 - 4x\right) \cdot (10x - 4)$$

6. **Sekarang setelah Anda mendapatkan turunan dari , masukkan hasil ini ke hasil dari Langkah 3, memberi Anda enchilada keseluruhan.**

$$3\left(\sin\left(5x^2 - 4x\right)\right)^2 \cdot \left(\cos\left(5x^2 - 4x\right)\right) \cdot (10x - 4)$$
$$= (30x - 12)\sin^2\left(5x^2 - 4x\right)\cos\left(5x^2 - 4x\right)$$

Anda dapat menghemat waktu dengan tidak beralih ke kata hal dan kemudian beralih kembali. Tetapi beberapa orang suka menggunakan teknik ini karena memaksa mereka untuk meninggalkan barang-barang itu sendiri selama setiap langkah masalah. Itulah titik kritisnya. Pastikan Anda . . . JANGAN SENTUH BARANGNYA.

Jangan mengubah fungsi dalam sambil membedakan yang luar. Katakanlah Anda ingin membedakan $f(x) = In(x^3)$. Argumen dari fungsi logaritma natural ini adalah x^3 . Jangan menyentuhnya selama langkah pertama solusi, yaitu menggunakan aturan log natural: $\frac{d}{dx}\, In\; x = \frac{1}{x}$, yang mengatakan untuk menempatkan argumen fungsi log natural dalam penyebut di bawah 1. Jadi, setelah langkah pertama dalam membedakan In(x^3), Anda mendapatkan $\frac{1}{x^3}$. Selesai dengan mengalikannya dengan turunan dari x^3, yaitu $3x^2$. Jawaban akhir: $\frac{3}{x}$.

Cara lain untuk menghindari kesalahan aturan rantai adalah dengan mengingat bahwa Anda tidak pernah menggunakan lebih dari satu aturan turunan sekaligus.

Pada contoh sebelumnya, $In(x^3)$ Anda pertama-tama menggunakan aturan log natural, kemudian, sebagai langkah terpisah, Anda menggunakan aturan pangkat untuk membedakan. Pada masalah aturan rantai apa pun, Anda tidak menggunakan kedua aturan secara bersamaan dan menulis sesuatu seperti $\frac{1}{3x^2}$.

Aturan Rantai (untuk membedakan fungsi komposit):

Jika $y = f(g(x))$,   ,

kemudian $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Atau, secara ekuivalen,
Jika $y = f(u)$, , dan $u = g(x)$,
Kemudian $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (perhatikan bagaimana dus membatalkan).
Terakhir, bedakan $4x^2 \sin(x^3)$. Yang ini memiliki sentuhan baru — ini melibatkan aturan rantai dan aturan produk. Bagaimana Anda memulai?
Jika Anda tidak yakin dari mana harus mulai membedakan ekspresi kompleks, bayangkan memasukkan angka ke x dan kemudian mengevaluasi ekspresi pada kalkulator Anda selangkah demi selangkah.
Perhitungan terakhir Anda memberi tahu Anda hal pertama yang harus dilakukan.

Katakanlah Anda memasukkan angka 5 ke xs di $4x^2 \sin(x^3)$. Anda mengevaluasi $4 \cdot 5^2$ — itu 100; kemudian, setelah mendapatkan , Anda melakukannya $5^3 = 125$, yaitu tentang . Akhirnya, Anda mengalikan 100 dengan -0.616. Karena perhitungan terakhir Anda adalah perkalian, langkah pertama Anda dalam membedakan adalah menggunakan aturan perkalian. (Apakah perhitungan terakhir Anda seperti sin(125) , Anda akan mulai dengan aturan rantai.) Jadi untuk $f(x) = 4x^2 \sin(x^3)$, , mulailah dengan aturan perkalian:

$$f'(x) = \left(4x^2\right)'\left(\sin\left(x^3\right)\right) + \left(4x^2\right)\left(\sin\left(x^3\right)\right)'$$

Sekarang selesaikan dengan mengambil turunan dari dengan aturan pangkat dan turunan dari sin(x^3) dengan aturan rantai:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (8x)\left(\sin\left(x^3\right)\right) + \left(4x^2\right)\left(\cos\left(x^3\right) \cdot 3x^2\right) \\ &= 8x \sin\left(x^3\right) + 12x^4 \cos\left(x^3\right) \end{aligned}$$

5.5 MEMBEDAKAN SECARA IMPLISIT

Semua masalah diferensiasi sejauh ini dalam bab ini adalah fungsi seperti $y = x^2 + 5x$ atau y = sin x (dan y kadang-kadang ditulis sebagai $f(x)$, seperti pada $f(x) = x^3 + x4^2$). Dalam kasus seperti itu, y ditulis secara eksplisit sebagai fungsi dari x. Ini berarti bahwa persamaan diselesaikan untuk y (dengan y sendiri di satu sisi persamaan).

Namun, terkadang Anda diminta untuk membedakan persamaan yang tidak diselesaikan untuk y, seperti $y^5 + 3x^2 = \sin x - 4y^3$. Persamaan ini mendefinisikan y secara implisit sebagai fungsi dari x, dan Anda tidak dapat menuliskannya sebagai fungsi eksplisit karena tidak dapat diselesaikan untuk y. Untuk ini, Anda memerlukan diferensiasi implisit. Saat membedakan secara implisit, semua aturan turunan bekerja sama dengan satu pengecualian: saat Anda membedakan suku dengan y di dalamnya, Anda menggunakan aturan rantai dengan sedikit twist.

Ingat menggunakan aturan rantai untuk membedakan sesuatu seperti sin(x^3) dengan teknik *stuff*? Turunan sinus adalah cosinus, jadi turunan dari adalah *sin(stuff)* , yaitu cos $(stuff) \cdot stuff'$. Anda menyelesaikan masalah dengan menemukan turunan dari *stuff,* x^3 dan kemudian membuat substitusi untuk memberi Anda $\cos(x^3) \cdot 3x^2$. Dengan diferensiasi implisit, a y bekerja seperti kata stuff. Jadi, karena

$$(\sin(stuff))' = \cos(stuff) \cdot stuff'$$
$$(\sin(y))' = \cos(y) \cdot y'$$

Twistnya tidak seperti kata stuff, yang untuk sementara menggantikan beberapa fungsi x yang diketahui (dalam hal ini contoh), y adalah beberapa fungsi x yang tidak diketahui. Dan karena kamu tidak tahu apa y sama, y dan — tidak seperti barang dan — harus tetap di jawaban akhir. Konsepnya sama, dan Anda memperlakukan Anda seperti barangnya. Hanya saja karena Anda tidak tahu apa fungsinya, Anda tidak dapat beralih kembali ke xs di akhir masalah seperti yang Anda bisa dengan masalah aturan rantai biasa. Ini dia. Membedakan $y^5 + 3x^2 = \sin x - 4y^3$.

1. **Bedakan setiap suku pada kedua ruas persamaan.**
   Untuk suku pertama dan keempat, gunakan aturan pangkat dan aturan rantai. Untuk suku kedua, gunakan aturan pangkat biasa. Untuk yang ketiga, gunakan aturan sinus biasa.

$$5y^4 \cdot y' + 6x = \cos x - 12y^2 \cdot y'$$

2. **Kumpulkan semua suku yang mengandung y' di ruas kiri persamaan dan semua suku lain di ruas kanan.**

$$5y^4 \cdot y' + 12y^2 \cdot y' = \cos x - 6x$$

3. **Faktor keluar y'.**

$$y'(5y^4 + 12y^2) = \cos x - 6x$$

4. **Bagilah untuk jawaban akhir.**

$$y' = \frac{\cos x - 6x}{5y^4 + 12y^2}$$

BAB 6
DIFERENSIASI DAN BENTUK KURVA

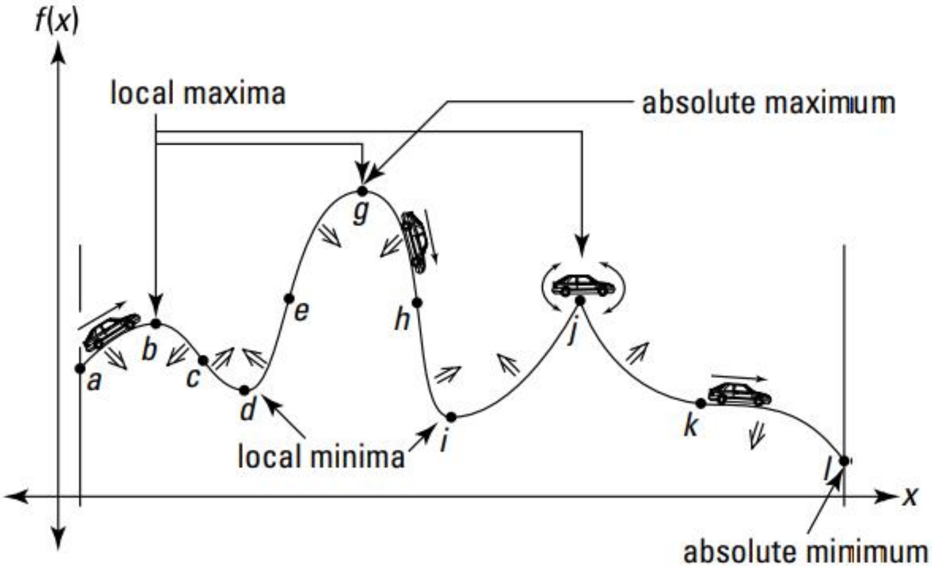
Dalam Bab Ini

- Menemukan titik ekstrim
- Menggunakan uji turunan pertama dan kedua
- Menafsirkan cekungan dan titik belok

Jika Anda telah membaca Bab 4 dan 5, Anda mungkin ahli dalam menemukan turunan. Yang merupakan hal yang baik, karena dalam bab ini Anda menggunakan turunan untuk memahami bentuk fungsi — di mana mereka naik, turun, max out dan bottom out, bagaimana mereka melengkung, dan sebagainya.

6.1 PERJALANAN KALKULUS

Bayangkan Anda sedang mengemudi di sepanjang fungsi pada Gambar 6-1 dari kiri ke kanan. Sepanjang perjalanan Anda, ada beberapa tempat menarik antara a dan l. Semuanya, kecuali titik awal dan akhir, berhubungan dengan kecuraman jalan — dengan kata lain, kemiringan atau turunannya. Saya akan memberikan banyak istilah dan definisi baru kepada Anda sekaligus di sini, tetapi Anda seharusnya tidak memiliki terlalu banyak masalah karena ide-ide ini sebagian besar melibatkan gagasan akal sehat seperti mengendarai atau menuruni tanjakan, atau melewati puncak sebuah bukit.



Gambar 6-1: Grafik fungsi dengan beberapa tempat menarik.

- ✓ Fungsi pada Gambar 6-1 memiliki turunan nol pada titik stasioner (titik level) b, d, g, i, dan k. Di j, turunannya tidak terdefinisi (titik balik tajam seperti j adalah sudut). Titik-titik di mana turunannya adalah nol atau tidak terdefinisi adalah titik kritis dari fungsi tersebut. Nilai-x dari titik kritis ini adalah bilangan kritis fungsi.
- ✓ Semua maks dan menit lokal — puncak dan lembah — harus terjadi pada titik kritis. Namun, tidak semua titik kritis adalah maks atau menit lokal. Titik k, misalnya, adalah

titik kritis tetapi bukan maks atau min. Maksimum dan minimum lokal — atau maksima dan minimum — disebut, secara kolektif, ekstrem lokal dari fungsi tersebut. Maks atau min lokal tunggal adalah ekstrem lokal. Titik g adalah maksimum absolut pada interval dari a ke l karena itu adalah titik tertinggi di jalan dari a ke l. Titik l adalah minimum absolut. Perhatikan bahwa g juga merupakan maks lokal, tetapi l bukan min lokal karena titik akhir (dan titik diskontinuitas) tidak memenuhi syarat sebagai ekstrem lokal.

- ✓ Fungsinya meningkat setiap kali Anda naik, di mana turunannya positif; itu menurun setiap kali Anda turun, di mana turunannya negatif. Fungsinya juga menurun di titik k, titik belok horizontal, meskipun kemiringan dan turunannya nol di sana. Saya menyadari itu tampak aneh, tetapi begitulah cara kerjanya. Pada semua titik belok horizontal, fungsi meningkat atau menurun. Pada ekstrem lokal b, d, g, i, dan j, fungsi tersebut tidak bertambah atau berkurang.
- ✓ Fungsinya cekung ke atas di mana pun terlihat seperti cangkir (berrima dengan ke atas) atau senyum (atau di mana ia "menampung air") dan cekung ke bawah di mana pun terlihat seperti kerutan (berrima dengan turun; di mana ia "menumpahkan air") . Di mana pun suatu fungsi cekung ke atas, turunannya meningkat; di mana pun suatu fungsi cekung ke bawah, turunannya menurun. Titik belok c, e, h, dan k adalah tempat perubahan kecekungan dari atas ke bawah atau sebaliknya. Titik belok juga merupakan titik paling curam atau paling tidak curam di lingkungan terdekatnya.

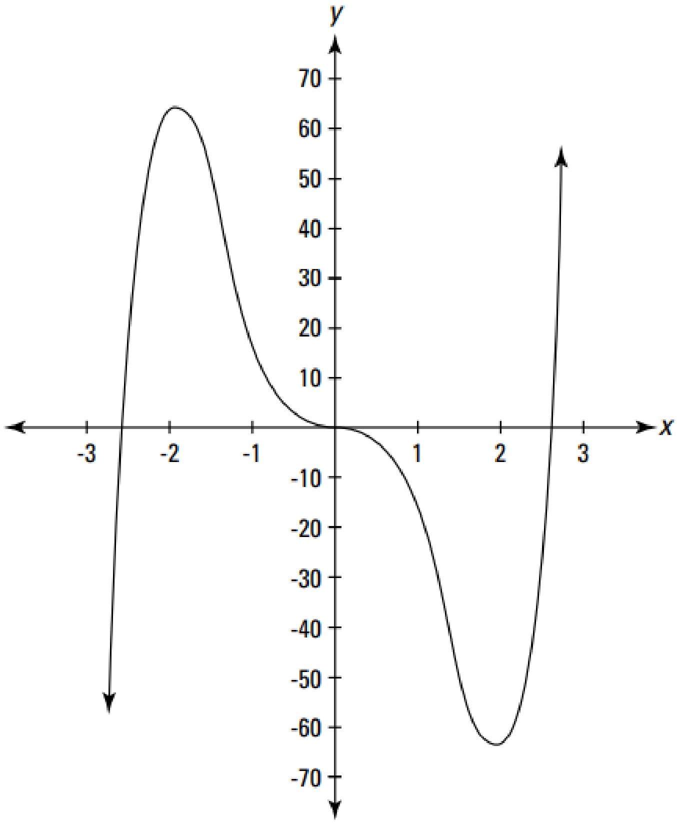
Hati-hati dengan bagian fungsi yang memiliki kemiringan negatif. Titik c adalah titik paling curam di lingkungannya karena memiliki kemiringan negatif yang lebih besar daripada titik terdekat lainnya. Tetapi ingat, bilangan negatif yang besar sebenarnya adalah bilangan yang kecil, sehingga kemiringan dan turunan di c sebenarnya adalah yang terkecil dari semua titik di lingkungan tersebut. Dari b ke c turunan fungsi menurun (karena menjadi negatif yang lebih besar). Dari c ke d, itu meningkat (karena menjadi negatif yang lebih kecil).

6.2 EKSTREM LOKAL

Sekarang setelah Anda mengetahui apa itu ekstrem lokal, Anda perlu mengetahui cara menghitungnya untuk menemukannya. Ingat, semua ekstrem lokal terjadi pada titik kritis suatu fungsi — di mana turunannya nol atau tidak terdefinisi. Jadi, langkah pertama dalam menemukan ekstrem lokal suatu fungsi adalah menemukan bilangan kritisnya (nilai-x dari titik kritis).

Menemukan Bilangan Kritis

Temukan bilangan kritis dari $f(x) = 3x^5 - 20x^3$. Lihat Gambar 6-2.



Gambar 6-2: Grafik $f(x) = 3x^5 - 20x^3$

1. **Temukan turunan pertama dari f menggunakan aturan pangkat.**

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3$$
$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

2. **Tetapkan turunannya sama dengan nol dan selesaikan untuk x.**

$$15x^4 - 60x^2 = 0$$
$$15x^2(x^2 - 4) = 0$$
$$15x^2(x+2)(x-2) = 0$$
$$15x^2 = 0 \quad \text{or} \quad x+2=0 \quad \text{or} \quad x-2=0$$
$$x = 0, \ -2, \quad \text{or} \quad 2$$

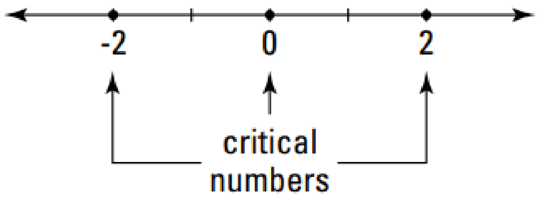
Ketiga nilai x ini adalah bilangan kritis dari f. Bilangan kritis tambahan dapat terjadi jika turunan pertama tidak terdefinisi pada beberapa nilai x, tetapi karena turunan, $15x^4 - 60x^2$, didefinisikan untuk semua nilai input, himpunan solusi di atas, 0, –2, dan 2 adalah daftar lengkap dari kritis angka. Karena turunan dari f sama dengan nol pada ketiga bilangan kritis ini, kurva memiliki tangen horizontal pada bilangan-bilangan ini.

Sekarang setelah Anda mendapatkan daftar bilangan kritis, Anda perlu menentukan apakah puncak atau lembah atau tidak keduanya terjadi pada nilai-x tersebut dengan menggunakan Uji Turunan Pertama atau Uji Turunan Kedua. (Tentu saja, Anda dapat melihat di mana puncak dan lembah hanya dengan melihat Gambar 6-2, tetapi Anda masih harus belajar matematika.)

6.3 UJI TURUNAN PERTAMA

Tes Turunan Pertama didasarkan pada gagasan kaliber hadiah Nobel bahwa saat Anda melewati puncak bukit, pertama Anda naik dan kemudian turun, dan ketika Anda berkendara masuk dan keluar lembah, Anda turun dan kemudian naik. Hal-hal kalkulus ini sangat menakjubkan, bukan?

Ambil garis bilangan dan tuliskan bilangan kritis yang Anda temukan di atas: 0, –2, dan 2. Lihat Gambar 6-3.

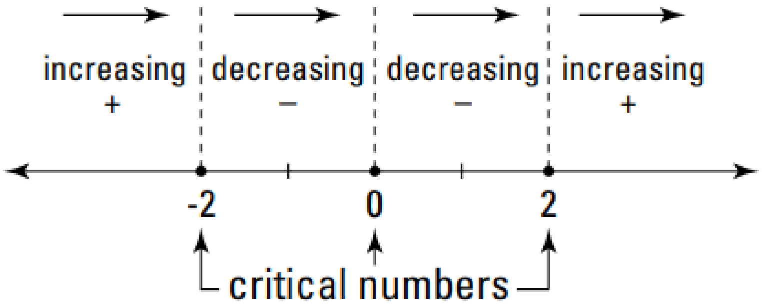


Gambar 6-3: Bilangan kritis dari $f(x) = 3x^5 - 20x^3$

Garis bilangan ini sekarang dibagi menjadi empat daerah: di sebelah kiri -2, dari -2 ke 0, dari 0 ke 2, dan di sebelah kanan 2. Pilih nilai dari setiap daerah, hubungkan ke turunan, dan catat apakah hasilnya positif atau negatif. Mari kita gunakan angka -3, -1, 1, dan 3 untuk menguji daerah.

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$
$$f'(-3) = 15(-3)^4 - 60(-3)^2 = 15 \cdot 81 - 60 \cdot 9 = 675$$
$$f'(-1) = 15(-1)^4 - 60(-1)^2 = 15 - 60 = -45$$
$$f'(1) = 15(1)^4 - 60(1)^2 = 15 - 60 = -45$$
$$f'(3) = 15(3)^4 - 60(3)^2 = 15 \cdot 81 - 60 \cdot 9 = 675$$

Keempat hasil ini, masing-masing, positif, negatif, negatif, atau positif. Sekarang, ambil garis bilangan Anda, tandai setiap daerah dengan tanda positif atau negatif yang sesuai, dan tunjukkan apakah fungsinya meningkat (turunan positif) atau menurun (turunan negatif). Hasilnya adalah grafik tanda. Lihat Gambar 6-4.



Gambar 6-4: Grafik tanda untuk $f(x) = 3x^5 - 20x^3$

Gambar 6-4 hanya memberi tahu Anda apa yang sudah Anda ketahui dari grafik f — bahwa fungsi naik sampai -2, turun dari -2 hingga 0, turun lagi dari 0 ke 2, dan naik lagi dari 2 ke atas.

Fungsi beralih dari naik ke turun di -2; Anda naik ke -2 dan kemudian turun. Jadi pada -2 Anda memiliki bukit atau maksimum lokal. Sebaliknya, karena fungsi beralih dari penurunan ke kenaikan pada 2, Anda memiliki lembah di sana atau minimum lokal. Dan karena tanda-tanda turunan pertama tidak beralih pada nol, tidak ada min atau max pada nilai x itu (Anda mendapatkan titik belok ketika ini terjadi).

Langkah terakhir adalah mendapatkan nilai fungsi (ketinggian) dari dua ekstrem lokal ini dengan memasukkan nilai-x ke fungsi aslinya:

$$f(-2) = 3(-2)^5 - 20(-2)^3 = 64$$
$$f(2) = 3(2)^5 - 20(2)^3 = -64$$

Maks lokal di (-2,64) dan min lokal di (2,-64).

6.4 UJI TURUNAN KEDUA

Tes Turunan Kedua didasarkan pada dua ide pemenang hadiah: Bahwa di puncak bukit, sebuah jalan memiliki bentuk punuk, sehingga melengkung ke bawah atau cekung ke bawah; dan bahwa di dasar lembah, sebuah jalan berbentuk cangkir, sehingga melengkung ke atas atau cekung.

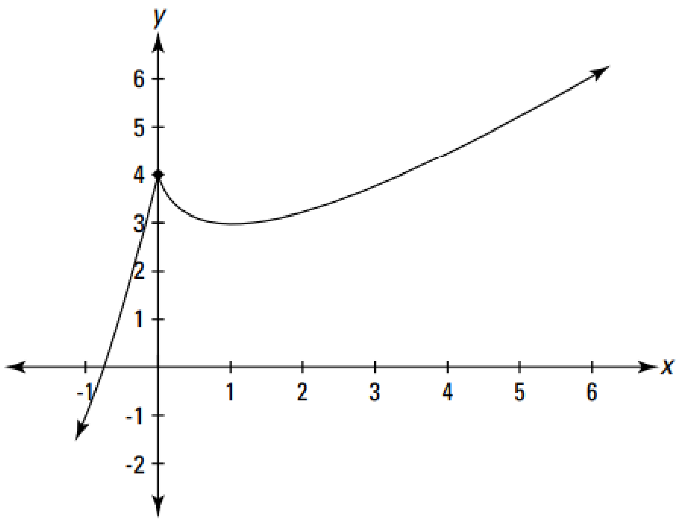
Kecekungan suatu fungsi pada suatu titik ditentukan oleh turunan kedua: Turunan kedua positif berarti fungsi cekung ke atas, turunan kedua negatif berarti fungsi cekung ke bawah, dan turunan kedua nol tidak meyakinkan (fungsi bisa cekung ke atas, cekung ke bawah, atau mungkin ada titik belok di sana). Jadi, untuk fungsi f kita, yang harus Anda lakukan adalah menemukan turunan keduanya dan kemudian memasukkan bilangan kritis yang Anda temukan (, 0, dan 2) dan perhatikan apakah hasilnya positif, negatif, atau nol.

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3$$
$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2 \quad \text{(power rule)}$$
$$f''(x) = 60x^3 - 120x \quad \text{(power rule)}$$

$$f''(-2) = 60(-2)^3 - 120(-2) = -240$$
$$f''(0) = 60(0)^3 - 120(0) = 0$$
$$f''(2) = 60(2)^3 - 120(2) = 240$$

Untuk kecerdasan pada turunan kedua negatif (-240). Ini memberitahu Anda bahwa f cekung ke bawah di mana x sama dengan -2, dan karena itu ada maks lokal di $x = -2$. Turunan kedua positif (240) di mana x adalah 2, jadi f cekung ke atas dan dengan demikian ada min lokal di x = 2. Karena turunan kedua sama dengan nol pada x = 0, Uji Turunan Kedua gagal — tidak memberi tahu Anda apa pun tentang kecekungan di x = 0 atau apakah ada min atau maks lokal di sana. Ketika ini terjadi, Anda harus menggunakan Tes Turunan Pertama.

Sekarang lakukan kedua tes turunan sekali lagi dengan contoh lain. Temukan ekstrem lokal dari $(x) = 2x - 3x^{2/3} + 4$. Lihat Gambar 6-5.



Gambar 6-5: Grafik $g(x) = 2x - 3x^{2/3} + 4$

1. **Tentukan turunan pertama dari g.**

$$g(x) = 2x - 3x^{2/3} + 4$$
$$g'(x) = 2 - 2x^{-1/3} \quad \text{(power rule)}$$

2. **Tetapkan turunannya sama dengan nol dan selesaikan.**

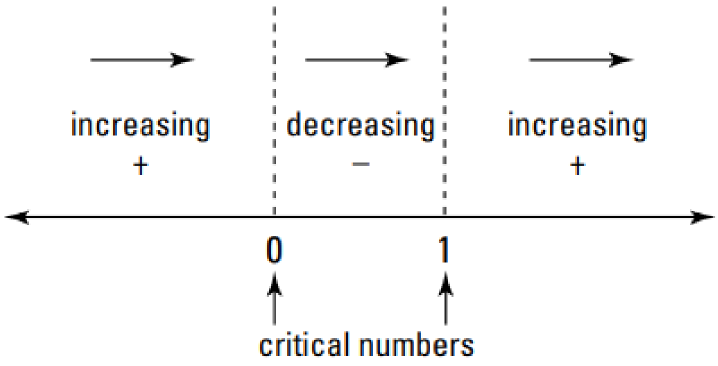
$$
\begin{aligned}
2-2x^{-1/3} &= 0 \\
-2x^{-1/3} &= -2 \\
x^{-1/3} &= 1 \\
\left(x^{-1/3}\right)^{-3} &= 1^{-3} \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Jadi 1 adalah bilangan kritis.

3. **Tentukan apakah turunan pertama tidak terdefinisi untuk setiap nilai x.**
   $2x^{-1/3}$ Sekarang $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$, karena akar pangkat tiga dari nol adalah nol, jika Anda memasukkan nol ke $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$, Anda akan memiliki $\frac{2}{0}$, yang tidak terdefinisi. Jadi turunannya, $2 - 2x^{-1/3}$ tidak terdefinisi pada x = 0, dan dengan demikian 0 adalah bilangan kritis lainnya.
4. **Gambarkan bilangan kritis pada garis bilangan, kemudian gunakan Uji Turunan Pertama untuk mengetahui tanda masing-masing daerah.**
   Anda dapat menggunakan , -1, 0,5, dan 2 sebagai nomor tes

$$
\begin{aligned}
g'(-1) &= 4 \\
g'(0.5) &\approx -0.52 \\
g'(2) &\approx 0.41
\end{aligned}
$$

Gambar 6-6 menunjukkan grafik tanda.



Gambar 6-6: Grafik tanda dari $g(x) = 2x - 3x^{2/3} + 4$

Karena turunan pertama dari g beralih dari positif ke negatif pada 0, ada maks lokal di sana. Dan karena turunan pertama beralih dari negatif ke positif pada 1, ada min lokal di x = 1.

5. **Masukkan bilangan kritis ke dalam g untuk mendapatkan nilai fungsi (ketinggian) dari dua ekstrem lokal ini.**

$$
g(x) = 2x - 3x^{2/3} + 4 \qquad \begin{aligned} g(0) &= 4 \\ g(1) &= 3 \end{aligned}
$$

Jadi, ada maks lokal di (0, 4) dan min lokal di (1, 3).

Anda dapat menggunakan Tes Turunan Kedua daripada yang Pertama pada Langkah 4. Anda memerlukan turunan kedua dari g, yang, seperti yang Anda ketahui, merupakan turunan dari turunan pertamanya:

$$g'(x) = 2 - 2x^{-1/3}$$
$$g''(x) = \frac{2}{3}x^{-4/3}$$

Evaluasi turunan kedua pada 1 (bilangan kritis dimana $g' = 0$).

$$g''(1) = \frac{2}{3}$$

Karena $g''(1)$ positif, Anda tahu bahwa g cekung ke atas di x = 1 dan, oleh karena itu, ada min lokal di sana. Uji Turunan Kedua tidak membantu jika turunan pertama tidak ditentukan (di mana x = 0), jadi Anda harus menggunakan Uji Turunan Pertama untuk bilangan kritis itu.

6.5 MENEMUKAN EKSTRIM MUTLAK PADA INTERVAL TERTUTUP

Setiap fungsi yang kontinu pada interval tertutup memiliki nilai maksimum absolut dan nilai minimum absolut dalam interval tersebut — titik tertinggi dan terendah — meskipun, seperti yang Anda lihat dalam contoh berikut, mungkin ada dasi untuk nilai tertinggi atau terendah.

Interval tertutup seperti [2, 5] mencakup titik akhir 2 dan 5. Interval terbuka seperti (2, 5) mengecualikan titik akhir.

Menemukan maks dan min absolut sangat mudah. Yang Anda lakukan hanyalah menghitung bilangan kritis fungsi dalam interval yang diberikan, menentukan tinggi fungsi pada setiap bilangan kritis, dan kemudian menghitung tinggi fungsi pada dua titik akhir interval. Yang terbesar dari kumpulan ketinggian ini adalah maksimum absolut; dan yang terkecil adalah min absolut. Contoh: Temukan maks dan min absolut dari $h(x) = \cos(2x) - 2\sin x$ i dalam tertutup interval. $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

1. **Temukan bilangan kritis h dalam interval terbuka** $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \cos(2x) - 2\sin x \\
h'(x) &= -\sin(2x)\cdot 2 - 2\cos x && \text{(by the chain rule)} \\
0 &= -2\sin(2x) - 2\cos x && \text{(now divide both sides by } -2\text{)} \\
0 &= \sin(2x) + \cos x && \text{(now use a trig identity)} \\
0 &= 2\sin x\cos x + \cos x && \text{(factor out } \cos x\text{)} \\
0 &= \cos x(2\sin x + 1)
\end{aligned}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{or} \quad 2\sin x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \qquad \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$$

.

Jadi, nol dari h', $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, and $\frac{11\pi}{6}$, dan karena didefinisikan untuk semua nomor input, ini adalah daftar lengkap nomor kritis.

2. **Hitung nilai fungsi (ketinggian) pada setiap bilangan kritis.**

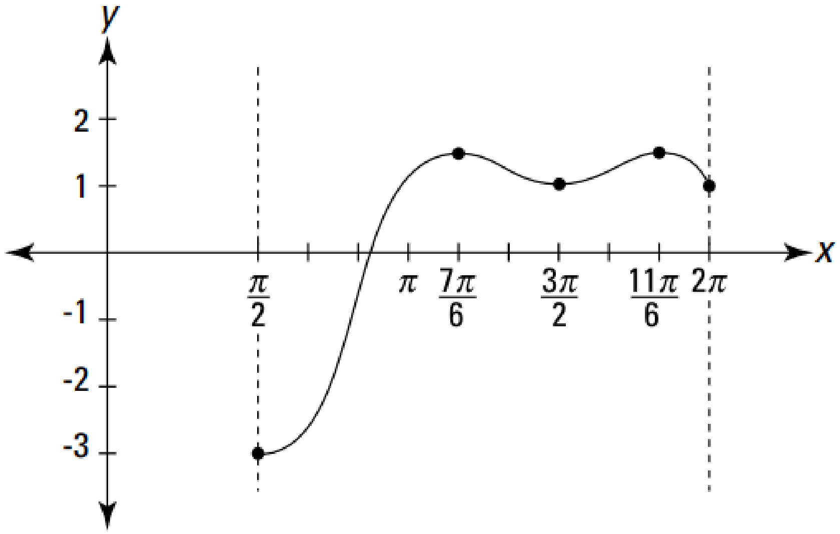
$$h\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{7\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 0.5 - 2\cdot(-0.5) = 1.5$$
$$h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 - 2\cdot(-1) = 1$$
$$h\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{11\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 0.5 - 2\cdot(-0.5) = 1.5$$

3. **Tentukan nilai fungsi pada titik akhir interval.**

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 2\cdot 1 = -3$$
$$h(2\pi) = \cos(2\cdot 2\pi) - 2\sin(2\pi) = 1 - 2\cdot 0 = 1$$

Jadi, dari Langkah 2 dan 3, Anda telah menemukan lima ketinggian: 1,5, 1, 1,5, -3, dan 1. Angka terbesar dalam daftar ini, 1,5, adalah maksimum mutlak; terkecil, -3, adalah min mutlak.

Maks absolut terjadi pada dua titik: $\left(\frac{7\pi}{6},\ 1.5\right)$ dan $\left(\frac{11\pi}{6},\ 1.5\right)$. Min absolut terjadi di salah satu titik akhir, $\left(\frac{\pi}{2},\ -3\right)$. Gambar 6-7 menunjukkan grafik h.



Gambar 6-7: Grafik dari $h(x) = \cos(2x) - 2sinx$

6.6 MENEMUKAN EKSTRIM MUTLAK ATAS SELURUH DOMAIN FUNGSI

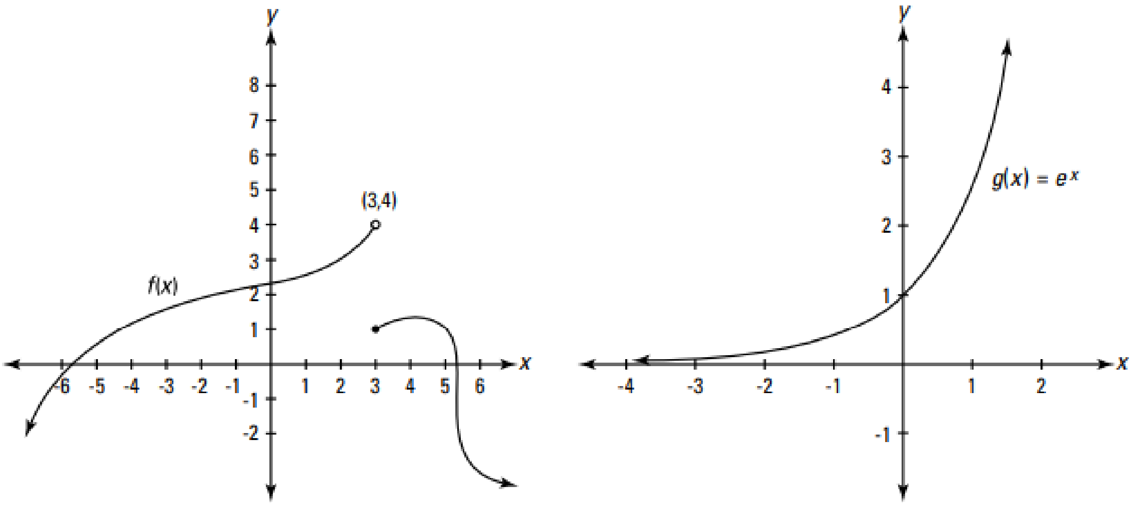
Maks absolut dan min absolut suatu fungsi di seluruh domainnya adalah nilai tertinggi dan terendah dari fungsi di mana pun ia didefinisikan. Suatu fungsi dapat memiliki max atau min absolut atau keduanya atau tidak keduanya. Misalnya, parabola memiliki min absolut pada titik (0, 0) — bagian bawah bentuk cangkirnya — tetapi tidak memiliki maks absolut karena naik selamanya ke kiri dan kanan. Anda dapat mengatakan bahwa maks absolutnya adalah tak terhingga jika bukan karena fakta bahwa tak terhingga bukanlah angka dan karenanya tidak memenuhi syarat sebagai maksimum (tentu saja, untuk infinitas negatif sebagai minimum).

Ide dasarnya adalah ini: Entah suatu fungsi akan memaksimalkan suatu tempat atau akan naik selamanya hingga tak terbatas. Dan ide yang sama berlaku untuk min dan turun ke infinity negatif.

Untuk menemukan maksimum dan min mutlak suatu fungsi di atas domainnya, temukan tinggi fungsi pada setiap bilangan kritisnya — sama seperti di bagian sebelumnya, kecuali bahwa di sini Anda mempertimbangkan semua bilangan kritis, bukan hanya bilangan kritis dalam interval tertentu. Nilai tertinggi dari nilai-nilai ini adalah maks absolut kecuali jika fungsi naik ke tak terhingga positif di suatu tempat, dalam hal ini Anda mengatakan bahwa fungsi tersebut tidak memiliki maks absolut. Yang terendah dari nilai-nilai ini adalah min absolut, kecuali jika fungsinya turun ke tak terhingga negatif, dalam hal ini tidak memiliki min absolut.

Jika suatu fungsi naik atau turun tanpa batas, ia melakukannya di ekstrem kanan atau kirinya atau pada asimtot vertikal. Jadi, langkah terakhir Anda (setelah mengevaluasi semua titik kritis) adalah mengevaluasi $\lim_{x\to\infty} f(x)$ dan $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ — yang disebut perilaku akhir fungsi — dan limit fungsi saat x mendekati setiap asimtot vertikal dari kiri dan dari kanan. Jika salah satu dari batas ini sama dengan tak terhingga positif, maka fungsi tersebut tidak memiliki maks absolut; jika tidak ada yang sama dengan tak terhingga positif, maka maks absolut adalah nilai fungsi pada titik kritis tertinggi. Dan jika salah satu dari batas-batas ini adalah tak terhingga negatif, maka fungsi tersebut tidak memiliki min mutlak; jika tidak ada yang sama dengan tak terhingga negatif, maka min absolut adalah nilai fungsi pada titik kritis terendah.

Gambar 6-8 menunjukkan beberapa fungsi di mana metode di atas tidak akan bekerja. Fungsi $f(x)$tidak memiliki maks absolut meskipun faktanya tidak naik hingga tak terhingga. Maksimumnya bukan 4 karena tidak pernah mencapai 4, dan maksimumnya tidak boleh kurang dari 4, seperti 3.999, karena lebih tinggi dari itu, katakanlah 3.9999. Fungsi $g(x)$ tidak memiliki min absolut meskipun faktanya tidak turun ke tak terhingga negatif. Ke kiri, merangkak di sepanjang asimtot horizontal pada y = 0. g semakin rendah, tetapi tidak pernah sampai serendah nol, jadi tidak nol atau nomor lain dapat menjadi min mutlak.



Gambar 6-8: Dua fungsi tanpa ekstrem absolut.

6.7 TITIK CEKUNG DAN INFLEKSI

Lihat kembali fungsi $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ pada Gambar 6-2. Anda menggunakan tiga bilangan kritis f, -2, 0, dan 2, untuk menemukan ekstrem lokal fungsi: (-2, 64) dan (2,-64) . Bagian ini menyelidiki apa yang terjadi di tempat lain pada fungsi ini — khususnya, di mana fungsi cekung ke atas atau ke bawah dan di mana kecekungan beralih (titik belok).

Proses mencari titik cekung dan titik belok analog dengan menggunakan Uji Turunan Pertama dan grafik tanda untuk menemukan ekstrem lokal, kecuali sekarang Anda menggunakan turunan kedua.

1. **Tentukan turunan kedua dari f.**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^5 - 20x^3 \\
f'(x) &= 15x^4 - 60x^2 \quad \text{(power rule)} \\
f''(x) &= 60x^3 - 120x \quad \text{(power rule)}
\end{aligned}
$$

2. **Tetapkan turunan kedua sama dengan nol dan selesaikan.**

$$60x^3 - 120x = 0$$
$$60x\left(x^2 - 2\right) = 0$$
$$60x = 0 \quad \text{or} \quad x^2 - 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

3. **Tentukan apakah turunan kedua tidak terdefinisi untuk setiap nilai-x.**

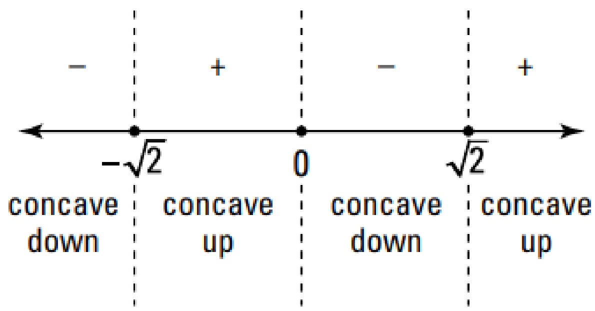
   $f''(x) = 60x^3 - 120x$ didefinisikan untuk semua bilangan real, jadi tidak ada nilai x lain untuk ditambahkan ke daftar dari Langkah 2.

   Langkah 2 dan 3 memberi Anda apa yang dapat Anda sebut bilangan kritis turunan kedua dari f karena mereka analog dengan bilangan kritis f yang Anda temukan menggunakan turunan pertama. Tapi, sejauh yang saya ketahui, kumpulan angka ini tidak memiliki nama khusus. Bagaimanapun, hal penting untuk diketahui adalah bahwa daftar ini terdiri dari nol ditambah nilai-x apa pun yang tidak terdefinisi.

4. **Plot angka-angka ini pada garis bilangan dan uji daerah dengan turunan kedua.**

   Gunakan -2, -1, 1 dan 2 sebagai nomor tes (Gambar 6-9 menunjukkan grafik tanda).

$$f''(-2) = -240$$
$$f''(-1) = 60$$
$$f''(1) = -60$$
$$f''(2) = 240$$



Gambar 6-9: Grafik tanda turunan kedua untuk $f(x) = 3x^5 - 20x^3$

Tanda positif pada grafik tanda ini memberi tahu Anda bahwa fungsinya cekung ke atas dalam interval itu; negatif berarti cekung ke bawah. Fungsi memiliki titik belok (biasanya) pada setiap nilai x di mana tanda-tanda beralih dari positif ke negatif atau sebaliknya.

Karena tanda-tanda beralih pada $-\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2}$ karena ketiga bilangan ini adalah nol dari f'', titik belok terjadi pada nilai-x ini. Tetapi dalam masalah di mana tanda-tanda beralih pada angka yang tidak ditentukan, f'', Anda harus memeriksa satu hal lagi sebelum Anda dapat menyimpulkan bahwa ada titik belok di sana. Titik belok ada pada nilai x yang diberikan hanya jika ada tangen ke fungsi pada angka itu. Ini adalah kasus di mana turunan pertama ada atau di mana ada tangen vertikal.

5. **Masukkan ketiga nilai x ini ke dalam f untuk mendapatkan nilai fungsi dari ketiga titik belok tersebut.**

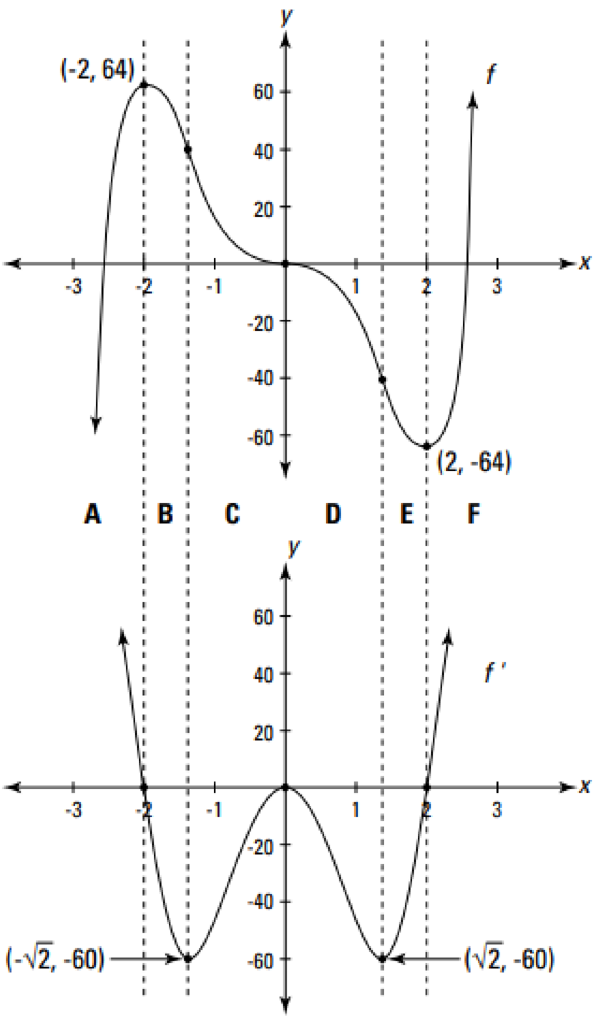
$$f\left(-\sqrt{2}\right) \approx 39.6$$
$$f(0) = 0$$
$$f\left(\sqrt{2}\right) \approx -39.6$$

Akar kuadrat dari dua sama dengan sekitar 1,4, jadi ada titik belok di sekitar (-1.4, 39.6),(0,0) , dan sekitar (1.4 -39.6)

6.8 GRAFIK DERIVATIF

Anda dapat belajar banyak tentang fungsi dan turunannya dengan membandingkan fitur penting dari grafiknya. Mari kita lanjutkan dengan fungsi yang sama; berjalan di sepanjang $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ dari kiri ke kanan (lihat Gambar 6-10), berhenti sejenak untuk mengamati tempat menariknya dan apa yang terjadi pada grafik $f'(x) = 15x^4 - 60x^2$ di titik yang sama. Tapi pertama-tama peringatan (panjang):

Melihat grafik pada Gambar 6-10, atau grafik turunan apa pun, Anda mungkin perlu sering mengingatkan diri sendiri bahwa "Ini adalah turunan yang saya lihat, bukan fungsinya!" Anda telah melihat begitu banyak grafik fungsi selama bertahun-tahun sehingga ketika Anda mulai melihat grafik turunan, Anda dapat dengan mudah menganggapnya sebagai fungsi biasa. Anda mungkin, misalnya, melihat interval yang naik pada grafik turunan dan secara keliru menyimpulkan bahwa fungsi aslinya juga harus naik pada interval yang sama — kesalahan yang mudah dilakukan. Anda tahu bahwa turunan pertama sama dengan kemiringan. Jadi, ketika melihat grafik turunan pertama naik, Anda mungkin berpikir, "Oh, turunan pertama (kemiringan) naik, dan ketika kemiringan naik itu seperti naik bukit, jadi fungsi aslinya harus akan naik." Ini kedengarannya masuk akal karena, secara longgar, Anda dapat menggambarkan sisi depan bukit sebagai lereng yang menanjak, meningkat. Tetapi secara matematis, sisi depan bukit memiliki kemiringan positif, tidak harus kemiringan yang meningkat. Jadi, di mana suatu fungsi meningkat, grafik turunannya akan positif, tetapi turunannya mungkin naik atau turun. Katakanlah Anda akan mendaki bukit. Saat Anda mendekati puncak, Anda masih naik, tetapi kemiringan (kecuraman) menurun. Mungkin 3, lalu 2, lalu 1, dan kemudian di puncak kemiringannya adalah nol. Dalam interval tersebut, grafik fungsi meningkat, tetapi grafik turunannya menurun. Mengerti?



Gambar 6-10: $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ dan turunan pertamanya $f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

Oke, mari kembali ke f dan turunannya, yang ditunjukkan pada Gambar 6-10. Ingat, sebelum peringatan kami bepergian sepanjang f dari kiri ke kanan. Mulai dari kiri, f meningkat sampai max lokal di (-2,64). Itu naik, jadi kemiringannya positif, tetapi f semakin tidak curam sehingga kemiringannya menurun — kemiringannya menurun hingga menjadi nol di puncak. Ini sesuai dengan grafik (kemiringan) yang positif (karena berada di atas sumbu x) tetapi menurun saat turun ke titik (-2,0) .

Siap untuk beberapa aturan tentang bagaimana grafik suatu fungsi dibandingkan dengan grafik turunannya? Nah, siap atau tidak, ini dia:

✓ Interval yang meningkat pada suatu fungsi sesuai dengan interval pada grafik turunannya yang positif (atau nol untuk satu titik jika fungsi tersebut memiliki titik belok horizontal). Dengan kata lain, interval peningkatan fungsi sesuai dengan bagian dari grafik turunan yang berada di atas sumbu x (atau yang menyentuh sumbu untuk satu titik dalam kasus titik belok horizontal). Lihat interval A dan F pada Gambar 6-10.

✓ Maks lokal pada grafik fungsi sesuai dengan nol (atau perpotongan x) pada interval grafik turunannya yang memotong sumbu x turun.

Saat Anda melihat titik pada grafik turunan, jangan lupa bahwa koordinat y dari suatu titik — seperti — pada grafik turunan pertama memberi tahu Anda kemiringan fungsi aslinya, bukan tingginya. Pikirkan sumbu y pada grafik turunan pertama sebagai sumbu kemiringan atau sumbu m.

- ✓ Interval menurun pada fungsi sesuai dengan interval negatif pada grafik turunan (atau nol untuk satu titik jika fungsi memiliki titik belok horizontal). Interval negatif pada grafik turunan berada di bawah sumbu x (atau dalam kasus titik belok horizontal, grafik turunan menyentuh sumbu x pada satu titik). Lihat interval B, C, D, dan E pada Gambar 6-10, di mana f turun sampai ke min lokal di dan di mana negatif — kecuali untuk titik (0, 0) — hingga mencapai (2, 0).
- ✓ Min lokal pada grafik fungsi sesuai dengan nol (atau perpotongan x) pada interval grafik turunannya yang melintasi sumbu x naik.

Sekarang telusuri kembali langkah Anda dan lihat kecekungan dan titik belok dari f pada Gambar 6-10. Pertama, pertimbangkan interval A dan B di sosok itu. Mulai dari kiri lagi, grafik f cekung ke bawah — kemiringan yang menurun — hingga mencapai titik belok sekitar (-1.4, 39.6). Jadi, grafik penurunannya sampai tom keluar di sekitar (-1.4, -60). Koordinat ini memberitahu Anda bahwa titik belok di -14 pada f memiliki kemiringan -60. Perhatikan bahwa titik belok di (-1.4, 39.6) adalah titik paling curam pada itu bentangan fungsi, tetapi memiliki kemiringan terkecil karena kemiringannya negatif lebih besar daripada kemiringan pada titik terdekat.

Antara (-1.4, 39.6) dan titik belok berikutnya di (0, 0), f cekung ke atas, yang artinya sama dengan kemiringan yang meningkat. Jadi grafik meningkat dari sekitar -1.4 ke tempat mencapai maks lokal di (0, 0). Lihat interval C pada Gambar 6-10.

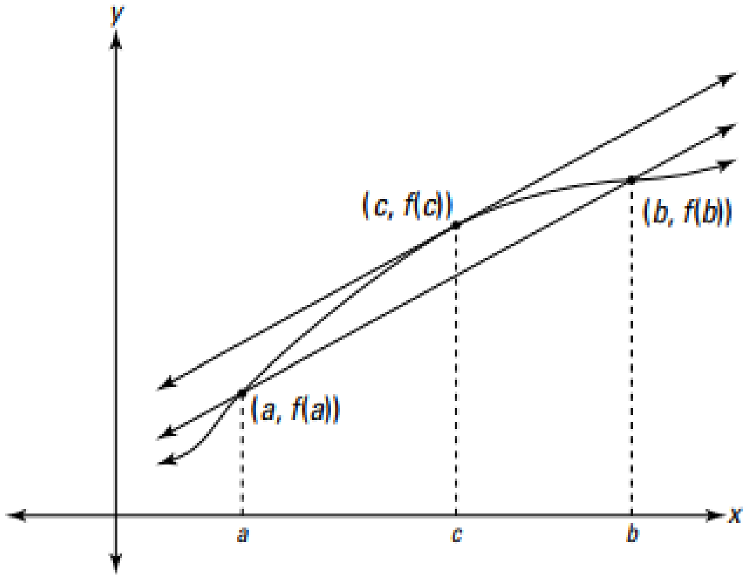
Saatnya untuk beberapa aturan lagi:

- ✓ Interval turun cekung pada grafik fungsi berhubungan dengan interval menurun pada grafik turunannya — interval A, B, dan D pada Gambar 6-10. Dan interval cekung pada fungsi sesuai dengan interval naik pada turunan — interval C, E, dan F.
- ✓ Titik belok pada suatu fungsi (kecuali untuk titik belok vertikal di mana turunannya tidak terdefinisi) sesuai dengan ekstrem lokal pada grafik turunannya. Titik belok dari kemiringan minimum sesuai dengan min lokal pada grafik turunan; titik belok kemiringan maksimum sesuai dengan maks lokal pada grafik turunan.

Setelah (0, 0), f cekung ke bawah sampai titik belok sekitar (-1.4, 39.6)— ini sesuai dengan bagian penurunan dari (0, 0) ke menitnya pada (1.4 -60) — interval D pada Gambar 6-10. Akhirnya, f cekung ke atas, yang sesuai ke bagian yang meningkat dari awal pada (1.4 -60) — interval E dan F pada Gambar 6-10.

6.9 TEOREMA NILAI MEAN

Anda tidak terlalu membutuhkan Teorema Nilai Rata-rata, tetapi ini adalah teorema yang terkenal dan penting, jadi Anda benar-benar harus mempelajarinya. Lihat Gambar 6-11 dan lihat apakah Anda bisa memahami omong kosong di bawahnya.



Gambar 6-11: Ilustrasi Teorema Nilai Rata-rata.

Teorema Nilai Rata-rata: Jika f kontinu pada selang tertutup [a, b] dan terdiferensiasi pada selang terbuka (a, b), maka terdapat paling sedikit satu bilangan c pada (a, b) sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Baik, jadi inilah yang dimaksud dengan teorema. Sekan yang menghubungkan titik-titik $(a, f(a))$dan $(b, f(b))$ pada Gambar 6-11 memiliki kemiringan yang diberikan oleh rumus kemiringan:

$$\begin{aligned} Slope &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa ini sama dengan ruas kanan persamaan dalam teorema nilai rata-rata. Turunan pada suatu titik sama dengan kemiringan tangen pada titik tersebut, sehingga teorema hanya mengatakan bahwa harus ada paling sedikit satu titik antara a dan b di mana kemiringan tangennya sama dengan kemiringan sekan dari a ke b. Hasilnya adalah garis paralel seperti yang Anda lihat pada Gambar 6-11.

BAB 7
MASALAH DIFERENSIASI

Dalam Bab Ini

- Posisi, kecepatan, dan percepatan — VROOOOM
- Tarif terkait — persiapkan diri Anda
- Berdiri dalam antrean untuk perkiraan linier

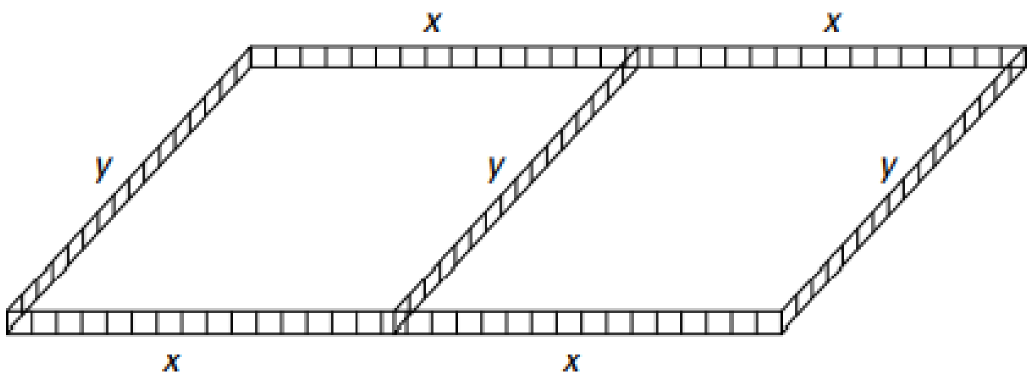
Dalam bab ini saya akhirnya menunjukkan kepada Anda bagaimana menggunakan kalkulus untuk memecahkan beberapa masalah praktis.

7.1 MASALAH OPTIMASI

Salah satu penggunaan praktis dari diferensiasi adalah menemukan nilai maksimum atau minimum dari fungsi dunia nyata: output maksimum dari sebuah pabrik atau jangkauan rudal, waktu minimum untuk menyelesaikan beberapa tugas, dan seterusnya. Ini contohnya.

Luas maksimum kandang

Seorang peternak dapat membeli pagar setinggi 300 kaki untuk membangun kandang yang dibagi menjadi dua persegi panjang yang sama. Lihat Gambar 7-1. Dimensi apa yang akan memaksimalkan luas kandang?



Gambar 7-1: Kalkulus untuk koboi — memaksimalkan kandang.

1. **a. Nyatakan hal yang ingin dimaksimalkan, luas, sebagai fungsi dari dua yang tidak diketahui, x dan y.**

$$A = l \cdot w$$
$$= (2x)(y)$$

Dalam beberapa masalah pengoptimalan, Anda dapat menulis hal yang ingin Anda maksimalkan atau minimalkan sebagai fungsi dari satu variabel — yang selalu Anda inginkan. Tapi di sini, area adalah fungsi dari dua variabel, jadi Langkah 1 memiliki dua sub-langkah tambahan.

1. **b. Gunakan informasi yang diberikan untuk menghubungkan dua yang tidak diketahui satu sama lain.**
   Pagar digunakan untuk tujuh bagian, jadi

$$\begin{aligned} 300 &= x + x + x + x + y + y + y \\ &= 4x + 3y \end{aligned}$$

1. **c. Selesaikan persamaan ini untuk y dan masukkan hasilnya ke dalam y dalam persamaan dari Langkah 1.a. Ini memberi Anda apa yang Anda butuhkan —a fungsi dari satu variabel.**

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 300 \\ y &= \frac{300 - 4x}{3} \\ y &= 100 - \frac{4}{3}x \\ A &= (2x)(y) \\ A(x) &= (2x)\left(100 - \frac{4}{3}x\right) \\ A(x) &= 200x - \frac{8}{3}x^2 \end{aligned}$$

2. **Tentukan domain dari fungsi tersebut.**
   Anda tidak dapat memiliki panjang pagar negatif, jadi x tidak dapat negatif, dan x paling banyak adalah 300 dibagi 4, atau 75. Jadi, $0 < x < 75$. Anda sekarang ingin mencari nilai maksimum (x) dalam interval ini. Anda menggunakan metode dari Bab 6 "Menemukan Ekstrem Absolut pada Interval Tertutup."
3. **Tentukan bilangan kritis dari $A(x)$ selang terbuka (0,75) dengan menetapkan turunannya sama dengan nol dan pemecahan. Dan jangan lupa untuk memeriksa angka di mana turunannya tidak terdefinisi.**

$$\begin{aligned} A(x) &= 200x - \frac{8}{3}x^2 \\ A'(x) &= 200 - \frac{16}{3}x \qquad \text{(by the power rule)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 200 - \frac{16}{3}x &= 0 \\ -\frac{16}{3}x &= -200 \\ x &= -200 \cdot \left(-\frac{3}{16}\right) \\ &= 37.5 \end{aligned}$$

Karena A' didefinisikan untuk semua nilai-x, 37,5 adalah satu-satunya bilangan kritis.

4. Evaluasi fungsi pada bilangan kritis, 37,5, dan pada titik akhir interval, 0 dan 75.

$$A(0) = 0$$
$$A(37.5) = 3{,}750$$
$$A(75) = 0$$

Min atau maks yang Anda inginkan tidak sering berada di titik akhir, tetapi bisa jadi, jadi pastikan untuk mengevaluasi fungsi di dua titik akhir interval.

Nilai maksimum dalam interval adalah 3.750, dan dengan demikian, nilai x dari 37,5 kaki memaksimalkan area kandang. Panjangnya 2x, atau 75 kaki. Lebarnya adalah y, yang sama dengan $100 - \frac{4}{3}x$. Memasukkan 37,5 memberi Anda $100 - \frac{4}{3}(37.5)$, atau 50 kaki. Jadi peternak akan membangun kandang 75'x50' dengan luas 3.750 kaki persegi.

7.2 POSISI, KECEPATAN, DAN PERCEPATAN

Setiap kali Anda masuk ke mobil Anda, Anda menyaksikan diferensiasi secara langsung. Kecepatan Anda adalah turunan pertama dari posisi Anda. Dan ketika Anda mempercepat atau memperlambat, Anda mengalami turunan kedua.

Jika suatu fungsi memberikan posisi sesuatu sebagai fungsi waktu, turunan pertama memberikan kecepatannya, dan turunan kedua memberikan percepatannya. Jadi, Anda membedakan posisi untuk mendapatkan kecepatan, dan Anda membedakan kecepatan untuk mendapatkan percepatan.

Berikut ini contohnya: Sebuah yo-yo bergerak lurus ke atas dan ke bawah. Ketinggiannya di atas tanah, sebagai fungsi waktu, diberikan oleh fungsi $H(t) = t^3 - 6t^2 + 5t + 30$, di mana t dalam detik dan $H(t)$ adalah dalam inci. Pada t = 0, itu 30 inci di atas tanah, dan setelah 4 detik, tingginya 18 inci. Kecepatan, $V(t)$, adalah turunan dari posisi (tinggi dalam soal ini), dan percepatan, , adalah turunan dari kecepatan. Dengan demikian -

$$H(t) = t^3 - 6t^2 + 5t + 30$$
$$V(t) = H'(t) = 3t^2 - 12t + 5$$
$$A(t) = V'(t) = H''(t) = 6t - 12$$

Perhatikan grafik ketiga fungsi ini pada Gambar 7-2.

Dengan menggunakan ketiga fungsi dan grafiknya, saya ingin membahas beberapa hal tentang gerak yo-yo:

- ✓ Tinggi maksimum dan minimum
- ✓ Kecepatan maksimum, minimum, dan rata-rata
- ✓ Perpindahan total
- ✓ Kecepatan maksimum, minimum, dan rata-rata
- ✓ Total jarak yang ditempuh
- ✓ Akselerasi positif dan negatif

- ✓ Mempercepat dan memperlambat

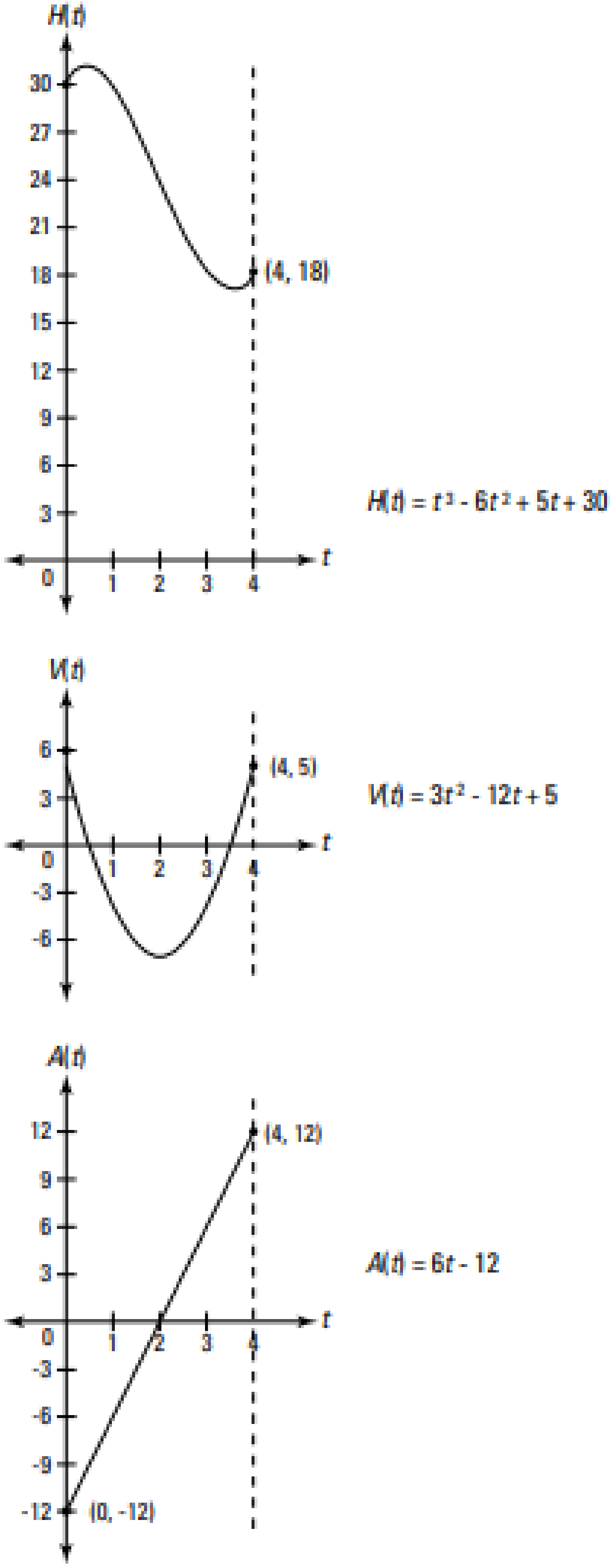
Itu banyak untuk dibahas, jadi saya akan mengambil jalan pintas — seperti tidak selalu memeriksa titik akhir saat mencari ekstrem jika jelas tidak terjadi di sana. Tapi sebelum membahas poin-poinnya, mari kita bahas beberapa hal tentang kecepatan, kecepatan, dan akselerasi.

Kecepatan Versus Kecepatan

Teman Anda tidak akan mengeluh — atau bahkan memperhatikan — jika Anda menggunakan kata “kecepatan” dan “kecepatan” secara bergantian, tetapi ahli matematika Anda yang ramah akan mengeluh. Inilah perbedaannya.

Untuk fungsi kecepatan pada Gambar 7-2, gerakan ke atas didefinisikan sebagai kecepatan positif, dan gerakan ke bawah adalah kecepatan negatif — ini adalah cara standar kecepatan diperlakukan di sebagian besar masalah kalkulus dan fisika. (Jika gerakannya horizontal, ke kanan adalah kecepatan positif dan ke kiri adalah kecepatan negatif.)

Kecepatan, di sisi lain, selalu positif (atau nol). Jika sebuah mobil melaju dengan kecepatan 50 mph, misalnya, Anda mengatakan kecepatannya adalah 50, dan maksud Anda positif 50, terlepas dari apakah itu ke kanan atau ke kiri. Untuk kecepatan, arah penting; untuk kecepatan tidak. Dalam kehidupan sehari-hari, kecepatan adalah ide yang lebih sederhana daripada kecepatan karena sesuai dengan akal sehat. Namun dalam kalkulus, kecepatan sebenarnya merupakan ide yang lebih sulit karena tidak cocok dengan skema tiga fungsi yang ditunjukkan pada Gambar 7-2.



Gambar 7-2: Grafik fungsi tinggi, kecepatan, dan percepatan yo-yo dari 0 hingga 4 detik.

Anda harus mengingat perbedaan kecepatan-kecepatan saat menganalisis kecepatan dan percepatan. Misalnya, jika sebuah objek turun (atau ke kiri) lebih cepat dan lebih cepat, kecepatannya bertambah, tetapi kecepatannya berkurang karena kecepatannya menjadi negatif yang lebih besar (dan negatif yang lebih besar adalah angka yang lebih kecil). Ini tampak aneh, tapi begitulah cara kerjanya. Dan inilah hal aneh lainnya: Percepatan didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan, bukan kecepatan. Jadi, jika sebuah benda melambat saat bergerak ke arah bawah, dan dengan demikian memiliki kecepatan yang meningkat — karena kecepatannya menjadi negatif yang lebih kecil — benda tersebut memiliki percepatan positif. Dalam bahasa Inggris sehari-hari, Anda akan mengatakan objek melambat (melambat), tetapi di kelas kalkulus, Anda mengatakan bahwa objek memiliki kecepatan negatif dan percepatan positif. (Omong-omong, "perlambatan" bukanlah istilah teknis, jadi Anda mungkin harus menghindarinya di kelas kalkulus. Sebaiknya gunakan kosakata berikut: "percepatan positif," "percepatan negatif," "mempercepat, ” dan “melambat.” Lebih lanjut tentang hal-hal ini nanti.)

Tinggi Maksimum dan Minimum

Maksimum dan minimum $H(t)$ terjadi pada ekstrim lokal terlihat pada Gambar 7-2. Untuk menemukannya, atur turunan dari $H(t)$, yaitu $V(t)$, sama dengan nol dan selesaikan.

$$
\begin{aligned}
H'(t) = V(t) &= 3t^2 - 12t + 5 \\
0 &= 3t^2 - 12t + 5 \\
t &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(5)}}{2 \cdot 3} \qquad \text{(quadratic formula)} \\
&= \frac{12 \pm \sqrt{84}}{6} \\
&= \frac{12 \pm 2\sqrt{21}}{6} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{21}}{3} \approx 0.47 \text{ or } 3.53
\end{aligned}
$$

Kedua angka ini adalah nol dari $V(t)$ dan koordinat t (koordinat waktu) dari maks dan min dari $H(t)$, yang dapat Anda lihat pada Gambar 7-2. Dengan kata lain, ini adalah saat-saat ketika yo-yo mencapai ketinggian maksimum dan minimum. Masukkan angka-angka $H(t)$ ini untuk mendapatkan ketinggian:

$$
\begin{aligned}
H(0.47) &\approx 31.1 \\
H(3.53) &\approx 16.9
\end{aligned}
$$

Jadi yo-yo menjadi setinggi sekitar 31,1 inci di atas tanah pada $t \approx 0.47$ detik dan serendah sekitar 16,9 inci di $t \approx 3.53$ detik.

Kecepatan dan perpindahan

Sekali lagi, kecepatan selalu positif, tetapi turun (atau kiri) adalah kecepatan negatif. Hubungan antara perpindahan dan jarak yang ditempuh adalah serupa: Jarak yang ditempuh selalu positif (atau nol), tetapi turun (atau ke kiri) adalah perpindahan negatif. Ide dasarnya adalah ini: Jika Anda berkendara ke toko 1 mil jauhnya — mengambil rute pemandangan dan mencatat 3 mil di odometer Anda — total jarak yang Anda tempuh adalah 3 mil, tetapi perpindahan Anda hanya 1 mil.

Perpindahan total

Perpindahan total sama dengan posisi akhir dikurangi posisi awal. Jadi, karena yo-yo dimulai pada ketinggian 30 dan berakhir pada ketinggian 18,

$$\textit{Total displacement} = 18 - 30 = -12$$

Ini negatif karena pergerakan bersihnya ke bawah.

Kecepatan rata-rata

Kecepatan rata-rata diberikan oleh perpindahan total dibagi dengan waktu yang berlalu. Dengan demikian,

$$\textit{Average velocity} = -\frac{12}{4} = -3$$

Jawaban negatif ini memberi tahu Anda bahwa yo-yo, rata-rata, turun 3 inci per detik.

Kecepatan maksimum dan minimum

Untuk menentukan kecepatan maksimum dan minimum yo-yo selama interval dari 0 hingga 4 detik, atur turunan dari $V(t)$, yaitu $A(t)$, sama dengan nol dan selesaikan:

$$\begin{aligned} V'(t) = A(t) &= 6t - 12 \\ 6t - 12 &= 0 \\ 6t &= 12 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Sekarang, evaluasi $V(t)$pada bilangan kritis, 2, dan pada titik akhir interval, 0 dan 4:

$$\begin{aligned} V(0) &= 5 \\ V(2) &= -7 \\ V(4) &= 5 \end{aligned}$$

Yo-yo memiliki kecepatan maksimum 5 inci dua kali per detik — di awal dan akhir interval. Ini mencapai kecepatan minimum -7 inci per detik pada t = 2 detik.

7.3 KECEPATAN DAN JARAK YANG DITEMPUH

Tidak seperti kecepatan dan perpindahan, yang memiliki definisi teknis, kecepatan dan jarak yang ditempuh memiliki arti yang masuk akal. Kecepatan, tentu saja, adalah apa yang Anda baca di speedometer Anda, dan Anda dapat membaca jarak yang ditempuh di odometer atau "tripometer" Anda.

Total jarak yang ditempuh

Untuk menentukan jarak total, tambahkan jarak yang ditempuh pada setiap kaki perjalanan yo-yo: kaki atas, kaki bawah, dan kaki kedua.

Pertama, yo-yo naik dari ketinggian 30 inci menjadi sekitar 31,1 inci (di mana titik putar pertama berada), jarak sekitar 1,1 inci. Selanjutnya turun dari sekitar 31,1 menjadi sekitar 16,9 (ketinggian titik balik kedua). Itu 31,1 – 16,9, atau sekitar 14,2 inci. Akhirnya, ia naik lagi dari sekitar 16,9 ke ketinggian akhir 18 inci, yang lain 1,1 inci. Tambahkan tiga jarak untuk mendapatkan total jarak yang ditempuh: $\sim 1.1 + \sim 14.2 + \sim 1.1 \approx 16.4$ inci.

Kecepatan rata-rata

Kecepatan rata-rata yo-yo diberikan oleh total jarak yang ditempuh dibagi dengan waktu yang telah berlalu. Dengan demikian,

$$Average\ speed \approx \frac{16.4}{4} \approx 4.1\ inches\ per\ second$$

Kecepatan maksimum dan minimum

Anda sebelumnya menentukan kecepatan maksimum yo-yo (5 inci per detik) dan kecepatan minimumnya (inci per detik). Kecepatan adalah kecepatan 7, jadi itulah kecepatan maksimum yo-yo. Kecepatan minimum nol terjadi pada dua titik perputaran.

Untuk fungsi kecepatan kontinu, kecepatan minimum adalah nol setiap kali kecepatan maksimum dan minimum berlawanan tanda atau ketika salah satunya adalah nol. Ketika kecepatan maksimum dan minimum keduanya positif atau keduanya negatif, maka kecepatan minimum adalah yang lebih kecil dari nilai absolut dari kecepatan maksimum dan minimum. Dalam semua kasus, kecepatan maksimum lebih besar dari nilai absolut kecepatan maksimum dan minimum. Itu seteguk atau apa?

7.4 PERCEPATAN

Mari kita membahas akselerasi: Letakkan pedal Anda ke logam.

Akselerasi positif dan negatif

Grafik fungsi percepatan di bagian bawah Gambar 7-2 adalah garis sederhana, $A(t) = 6t - 12$. Sangat mudah untuk melihat bahwa percepatan yo-yo berubah dari minimum $-12\frac{inches\ per\ second}{second}$ pada t = 0 detik hingga maksimum $12\frac{inches\ per\ second}{second}$ pada t = 4 detik, dan percepatannya nol pada t = 2 ketika yo-yo mencapai kecepatan minimum (dan kecepatan maksimum). Ketika percepatannya negatif — pada interval [0, 2) — itu berarti kecepatannya berkurang. Ketika percepatannya positif — pada interval (2, 4] — kecepatannya meningkat.

Mempercepat dan memperlambat

Mencari tahu kapan yo-yo dipercepat dan diperlambat mungkin lebih menarik dan deskriptif gerakannya daripada info di bagian sebelumnya. Sebuah benda dipercepat (apa yang kita sebut "percepatan" dalam percakapan sehari-hari) setiap kali kecepatan dan percepatan kalkulus keduanya positif atau keduanya negatif. Dan sebuah benda melambat (apa yang kita sebut "perlambatan") ketika kecepatan dan percepatan kalkulusnya berlawanan tanda.

Perhatikan kembali ketiga grafik pada Gambar 7-2. Dari t = 0 sampai sekitar t = 0,47 (ketika kecepatannya nol), kecepatannya positif dan percepatannya negatif, sehingga yo-yo melambat (sampai mencapai ketinggian maksimumnya). Ketika t = 0, perlambatan terbesar ($12\ \frac{inches\ per\ second}{second}$; grafik menunjukkan negatif 12, tapi saya menyebutnya positif 12 karena saya menyebutnya perlambatan, mengerti?) Dari sekitar t = 0,47 sampai t = 2 , kecepatan dan percepatan keduanya negatif, jadi yo-yo dipercepat. Dari t = 2 hingga sekitar t = 3,53, kecepatannya positif dan percepatannya negatif, jadi yo-yo melambat lagi (sampai mencapai ketinggian terendah). Akhirnya, dari sekitar t = 3,53 ke t = 4, kecepatan dan percepatan keduanya positif, sehingga yo-yo dipercepat lagi. Yo-yo mencapai percepatan terbesar 12 $\frac{inches\ per\ second}{second}$ pada t = 4 sekon.

Mengikat Semuanya Bersama-Sama

Perhatikan hubungan berikut antara tiga grafik pada Gambar 7-2. Bagian negatif pada grafik $A(t)$— dari t = 0 sampai t = 2 — berhubungan dengan bagian menurun dari grafik $V(t)$ dan bagian cekung ke bawah dari grafik $H(t)$. Interval positif pada grafik $A(t)$— dari t = 2 hingga t = 4 — sesuai dengan interval yang meningkat pada grafik dari $A(t)$dan interval cekung ke atas pada grafik $H(t)$. Ketika t = 2 detik, $A(t)$ memiliki nol, $V(t)$memiliki minimum lokal, dan $H(t)$ memiliki titik belok.

7.5 TARIF TERKAIT

Katakanlah Anda sedang mengisi kolam renang Anda; Anda tahu seberapa cepat air keluar dari selang Anda, dan Anda ingin menghitung seberapa cepat permukaan air di kolam naik. Anda tahu satu tingkat (seberapa cepat air mengalir masuk), dan Anda ingin menentukan tingkat lain (seberapa cepat permukaan air naik). Tarif ini disebut tarif terkait karena yang satu bergantung pada yang lain — semakin cepat air dituangkan, semakin cepat ketinggian air naik. Dalam masalah tarif terkait yang umum, tarif atau tarif yang Anda berikan tidak berubah, tetapi tarif yang harus Anda cari berubah seiring waktu. Anda harus menentukan tarif ini pada satu titik waktu tertentu.

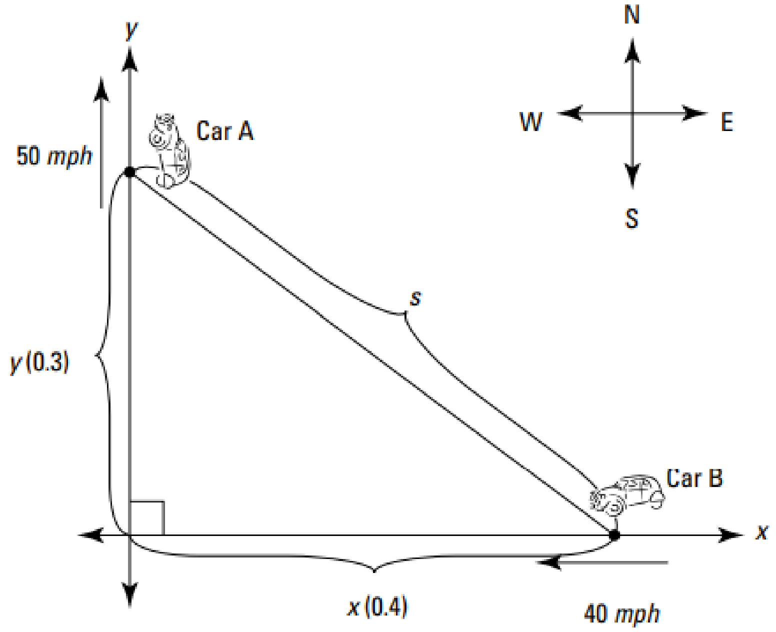
7.6 SEBUAH PERSIMPANGAN KALKULUS

Satu mobil meninggalkan persimpangan yang bergerak ke utara dengan kecepatan 50 mph; yang lain mengemudi ke barat menuju persimpangan dengan kecepatan 40 mph. Pada satu titik, mobil yang menuju ke utara berjarak tiga persepuluh mil di utara persimpangan dan mobil yang menuju ke barat berjarak empat persepuluh mil di timurnya. Pada titik ini, seberapa cepat jarak antara mobil berubah?

1. **Gambarlah diagram dan beri label dengan pengukuran yang tidak berubah (tidak ada dalam masalah khusus ini), dan pastikan untuk menetapkan variabel untuk apa pun dalam masalah yang berubah (kecuali jika tidak relevan dengan masalah). Lihat Gambar 7-3.**

   Perhatikan bahwa variabel telah ditetapkan untuk jarak antara Mobil A dan persimpangan, jarak antara Mobil B dan persimpangan, dan jarak antara dua mobil, karena jarak tersebut berubah. 0,3 dan 0,4 berada dalam tanda kurung untuk menekankan bahwa itu bukan pengukuran yang tidak berubah; mereka adalah jarak pada satu titik waktu tertentu.

   Dalam masalah tarif terkait, penting untuk membedakan antara apa yang berubah dan apa yang tidak berubah.



Gambar 7-3: Kalkulus — ini adalah drive di negara ini.

Anda mungkin menemukan masalah serupa di buku teks kalkulus Anda. Ini melibatkan tangga bersandar dan meluncur ke bawah dinding. Diagram untuk masalah ini akan sangat mirip dengan Gambar 7-3 kecuali bahwa sumbu y akan mewakili dinding, sumbu x akan menjadi tanah, dan garis diagonal akan menjadi tangga. Terlepas dari kesamaan antara kedua masalah ini, ada perbedaan penting: Jarak antara mobil berubah, sehingga garis diagonal pada Gambar 7-3 diberi label dengan variabel, s. Sebuah tangga, di sisi lain, memiliki panjang yang tetap, sehingga garis diagonal pada diagram untuk masalah tangga akan diberi label dengan angka, bukan variabel.

2. **Cantumkan semua kurs yang diberikan dan kurs yang diminta untuk Anda tentukan sebagai turunan terhadap waktu.**

Saat Mobil A bergerak ke utara, y tumbuh dengan kecepatan 50 mil per jam. Itu adalah tingkat, perubahan jarak per perubahan waktu. Jadi,

$$\frac{\text{change in distance in } y \text{ direction}}{\text{change in time}} = \frac{dy}{dt} = 50 \text{ mph}$$

Saat Mobil B bergerak ke barat, x menyusut dengan kecepatan 40 mil per jam. Itu adalah tingkat negatif:

$$\frac{\text{change in distance in } x \text{ direction}}{\text{change in time}} = \frac{dx}{dt} = -40 \text{ mph}$$

Anda harus mencari tahu seberapa cepat s berubah, jadi

$$\frac{\text{change in distance in } s \text{ direction}}{\text{change in time}} = \frac{ds}{dt} = ?$$

3. **Tulislah rumus yang menghubungkan variabel-variabel dalam soal: x, y, dan s.**
   Ada segitiga siku-siku dalam diagram Anda, jadi Anda menggunakan Teorema Pythagoras: $x^2 + y^2 = s^2$.
   Teorema Pythagoras banyak digunakan dalam masalah tarif terkait. Jika ada segitiga siku-siku dalam soal Anda, kemungkinan $a^2 + b^2 = c^2$ itulah rumus yang Anda perlukan.
4. **Bedakan rumus Anda terhadap waktu, t.**
   Ketika Anda membedakan dalam masalah tarif terkait, semua variabel diperlakukan seperti ys diperlakukan dalam masalah diferensiasi implisit tipikal.

$$s^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{(implicit differentiation}$$
$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \qquad \text{with the power rule)}$$

5. **Substitusikan nilai yang diketahui untuk laju dan variabel dalam persamaan dari Langkah 4, lalu selesaikan untuk hal yang diminta untuk Anda tentukan, $\frac{ds}{dt}$.**

$$x = 0.4,\ y = 0.3,\ \frac{dx}{dt} = -40,\ \frac{dy}{dt} = 50,\ \text{and } s = \text{......}$$

Ada kesalahan di sini karena Anda tidak tahu (Anda akan mengalami kesalahan ini di beberapa tetapi tidak semua masalah tarif terkait). Jangan khawatir, gunakan saja Teorema Pythagoras lagi.

$$\begin{aligned} s^2 &= x^2 + y^2 \\ s^2 &= 0.4^2 + 0.3^2 \\ &= 0.25 \\ s &= \pm 0.5 \quad \text{(square rooting both sides)} \end{aligned}$$

Anda dapat menolak jawaban negatif karena s jelas memiliki panjang positif. Jadi s = 0,5.
Sekarang masukkan semuanya ke dalam persamaan Anda.

$$\begin{aligned} 2s\frac{ds}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \\ 2 \cdot 0.5 \cdot \frac{ds}{dt} &= 2 \cdot 0.4 \cdot (-40) + 2 \cdot 0.3 \cdot 50 \\ 1 \cdot \frac{ds}{dt} &= -32 + 30 \\ \frac{ds}{dt} &= -2 \end{aligned}$$

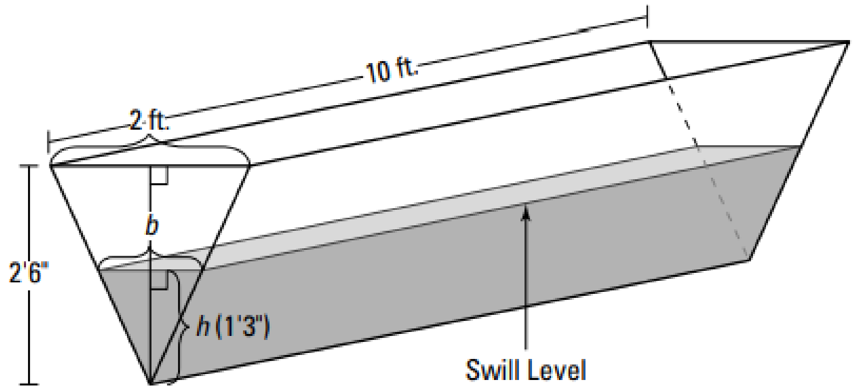
Jawaban negatif ini berarti jarak, s, berkurang. Jadi, ketika mobil A berada 3 blok di utara persimpangan dan mobil B berada 4 blok di timur persimpangan, jarak antara mereka berkurang dengan laju 2 mph.

Pastikan untuk membedakan (Langkah 4) sebelum Anda memasukkan informasi yang diberikan ke yang tidak diketahui (Langkah 5).

7.7 MENGISI PALUNG

Inilah masalah tarif terkait varietas taman lainnya. Sebuah palung sedang diisi dengan swill. Panjangnya 10 kaki, dan penampangnya adalah segitiga sama kaki dengan alas 2 kaki dan tinggi 2 kaki 6 inci (tentu saja dengan simpul di bagian bawah). Swill dituangkan dengan kecepatan 5 kaki kubik per menit. Ketika kedalaman swill adalah 1 kaki 3 inci, seberapa cepat tingkat swill naik?

1. **Gambarlah diagram, beri label diagram dengan pengukuran yang tidak berubah dan berikan variabel pada hal yang berubah. Lihat Gambar 7-4.**



Gambar 7-4: Mengisi bak dengan swill — waktu makan siang.

Perhatikan bahwa Gambar 7-4 menunjukkan dimensi palung yang tidak berubah, 2 kaki, 2 kaki 6 inci, dan 10 kaki, dan bahwa dimensi ini tidak memiliki nama variabel seperti l untuk panjang atau h untuk tinggi. Dan perhatikan bahwa hal-hal yang berubah — tinggi (atau kedalaman) swill dan lebar permukaan swill (yang semakin lebar saat swill semakin dalam) — memiliki nama variabel, h untuk tinggi dan b untuk alas (Saya menyebutnya alas, bukan lebar, karena itu alas dari bentuk segitiga terbalik yang dibuat oleh swill). Volume swill juga berubah, jadi Anda bisa menyebutnya V, tentu saja.

2. **Cantumkan semua tarif yang diberikan dan tarif yang diminta untuk Anda ketahui sebagai turunan sehubungan dengan waktu.**

$$\frac{dV}{dt} - 5 \textit{ cubic feet per minute} \qquad \frac{dH}{dt} - ?$$

3. **a. Tuliskan rumus yang menghubungkan variabel-variabel dalam soal: V, h, dan b.** Ingat rumus volume prisma siku-siku (bentuk swill di bak)?:

$$V = (\textit{area of base}) \cdot (\textit{height})$$

Perhatikan bahwa "alas" ini adalah alas prisma (seluruh segitiga di ujung bak), bukan alas segitiga berlabel b pada Gambar 7-4. Juga, "tinggi" ini adalah tinggi prisma (panjang bak), bukan tinggi berlabel h pada Gambar 7-4. Maaf tentang kebingungan. Berurusan dengan itu.

Luas alas segitiga sama dengan $\frac{1}{2}bh$, dan "tinggi" prisma adalah 10 kaki, sehingga rumusnya menjadi:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}bh \cdot 10 \\ &= 5bh \end{aligned}$$

Rumus ini berisi variabel, b, yang tidak Anda lihat dalam daftar turunan di Langkah 2. Jadi, Langkah 3 memiliki bagian kedua — singkirkan variabel tambahan ini.

3. **b. Temukan persamaan yang menghubungkan variabel yang tidak diinginkan, b, dengan beberapa variabel lain dalam soal sehingga Anda dapat membuat substitusi yang hanya menyisakan V dan h.**

   Wajah segitiga dari swill di palung serupa ke wajah segitiga palung itu sendiri, jadi dasarnya dan tinggi segitiga ini proporsional. (Ingat dari geometri bahwa segitiga yang sebangun adalah segitiga dari bentuk yang sama; sisi-sisinya proporsional.) Jadi,

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} &= \frac{h}{2.5} \\ 2.5b &= 2h \\ b &= \frac{2h}{2.5} \\ b &= 0.8h \end{aligned}$$

   Segitiga serupa muncul banyak dalam masalah tarif terkait. Cari mereka setiap kali masalah melibatkan segitiga, prisma segitiga, atau bentuk kerucut.

   Sekarang gantikan 0.8h untuk b dalam rumus Anda dari Langkah 3.a.

$$\begin{aligned} V &= 5bh \\ V &= 5 \cdot 0.8h \cdot h \\ V &= 4h^2 \end{aligned}$$

4. **Bedakan persamaan ini terhadap t.**

$$\frac{dV}{dt} = 8h\frac{dh}{dt}$$

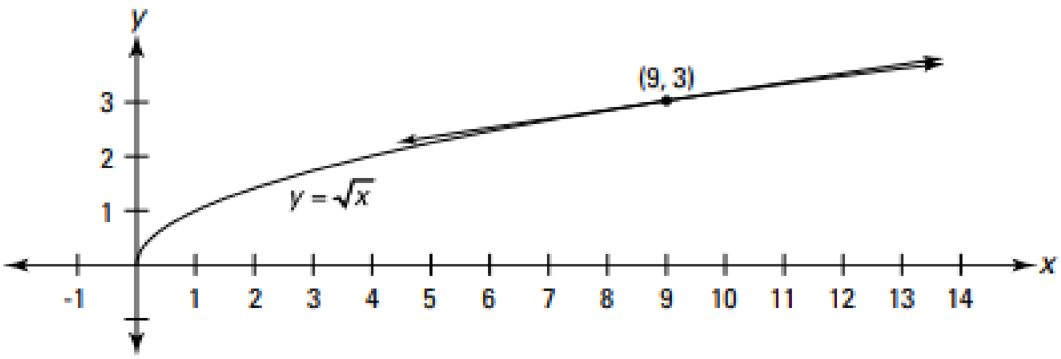
5. **Substitusikan nilai yang diketahui untuk laju dan variabel dalam persamaan dari Langkah 4 dan kemudian selesaikan.**
   Anda tahu bahwa $\frac{dV}{dt}$ kaki kubik per menit, dan Anda ingin menentukan $\frac{dh}{dt}$ kapan h sama dengan 1 kaki 3 inci, atau 1,25 kaki, jadi masukkan 5 dan 1,25 dan selesaikan $\frac{dh}{dt}$:

$$5 = 8 \cdot 1.25 \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$5 = 10 \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2}$$

Itu dia. Level swill meningkat dengan kecepatan 1/2 kaki per menit ketika swill berada di kedalaman 1 kaki 3 inci. Menggali.

7.8 PENDEKATAN LINIER

Karena fungsi biasa bersifat linier lokal (lurus) — dan semakin jauh Anda memperbesarnya, semakin lurus tampilannya — tangen pada suatu fungsi adalah aproksimasi yang baik dari fungsi di dekat titik singgung. Gambar 7-5 menunjukkan grafik dari $f(x) = \sqrt{x}$ dan tangen fungsi di titik (9, 3). Dekat (9, 3), kurva dan tangen hampir tidak bisa dibedakan.



Gambar 7-5: Grafik $f(x) = \sqrt{x}$ dan tangen kurva di (9, 3).

Menentukan persamaan tangen ini sangat mudah. Anda mendapatkan sebuah titik, (9, 3), dan kemiringan diberikan oleh turunan dari f pada 9:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ &= x^{1/2} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \quad \text{(by the power rule)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(9) &= \frac{1}{2\sqrt{9}} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Sekarang ambil kemiringan ini $\frac{1}{6}$, dan titik (9, 3), dan masukkan ke dalam bentuk kemiringan titik:

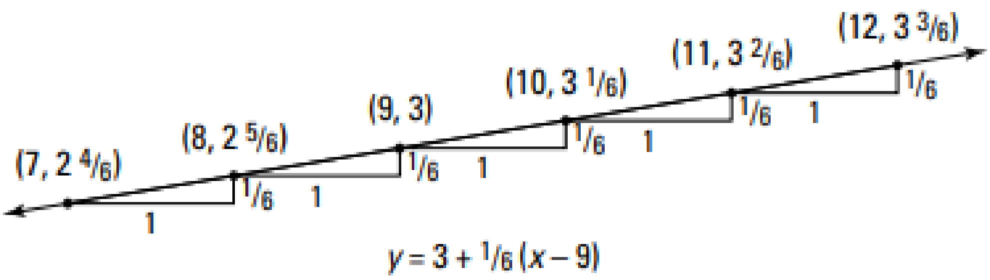
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{1}{6}(x - 9)$$
$$y = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$$

Itulah persamaan tangen $f(x) = \sqrt{x}$ di (9, 3). Apakah Anda bertanya-tanya mengapa saya menulis persamaan sebagai $y = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$? Mungkin tampak lebih alami untuk menempatkan 3 di sebelah kanan $\frac{1}{6}(x - 9)$, yang, tentu saja, juga benar. Dan saya bisa menyederhanakan persamaan lebih lanjut, menuliskannya dalam bentuk $y = mx + b$. Saya jelaskan nanti di bagian ini mengapa saya menulisnya seperti yang saya lakukan.

Sekarang, katakanlah Anda ingin mendekati akar kuadrat dari 10. Karena 10 cukup dekat dengan 9, dan karena Anda dapat melihat dari Gambar 7-5 bahwa $f(x)$ dan tangennya saling berdekatan di x = 10, koordinat y dari garis di x = 10 adalah pendekatan yang baik dari nilai fungsi di x = 10, yaitu $\sqrt{10}$. Cukup masukkan 10 ke persamaan garis untuk perkiraan Anda:

$$y = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$$
$$= 3 + \frac{1}{6}(10 - 9)$$
$$= 3\frac{1}{6}$$

Jadi, akar kuadrat dari 10 adalah sekitar $3\frac{1}{6}$. Ini hanya tentang 0,004 lebih banyak dari jawaban pasti 3,1623.



Gambar 7-6: Garis aproksimasi linier dan beberapa titiknya.

Sekarang saya dapat menjelaskan mengapa saya menulis persamaan tangen seperti yang saya lakukan. Formulir ini memudahkan untuk melakukan perhitungan dan lebih mudah untuk memahami apa yang terjadi saat Anda menghitung perkiraan. Tahukah kamu bahwa garis itu melalui titik (9, 3)? Dan Anda tahu kemiringan garisnya adalah $\frac{1}{6}$. Jadi, Anda bisa mulai dari (9, 3) dan pergi ke kanan (atau kiri) di sepanjang garis seperti anak tangga, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 7-6: lebih dari 1, naik $\frac{1}{6}$; lebih dari 1, naik $\frac{1}{6}$; dan seterusnya.

Jadi, ketika Anda melakukan pendekatan, Anda mulai dari nilai y 3 dan naik $\frac{1}{6}$ untuk setiap 1 Anda pergi ke kanan. Atau jika Anda pergi ke kiri, Anda turun $\frac{1}{6}$ untuk setiap 1 Anda pergi ke kiri. Ketika persamaan garis ditulis dalam bentuk di atas, perhitungan aproksimasi sejajar dengan skema anak tangga ini.

Gambar 7-6 menunjukkan nilai perkiraan untuk akar kuadrat dari 7, 8, 10, 11, dan 12. Berikut adalah cara Anda mendapatkan nilai-nilai ini: Untuk mendapatkan ke 8, misalnya, dari (9, 3), Anda pergi 1 ke kiri, jadi Anda turun $\frac{1}{6}$ hingga $2\frac{5}{6}$; atau untuk sampai ke 11 dari (9, 3), Anda pergi dua ke kanan, jadi Anda naik dua per enam ke $3\frac{2}{6}$ atau $3\frac{1}{3}$. (Jika Anda pergi ke setengah kanan ke $9\frac{1}{2}$, Anda naik setengah dari seperenam, itu adalah seperdua belas, ke $3\frac{1}{12}$— perkiraan akar kuadrat dari $9\frac{1}{2}$.)

Di bawah ini adalah kesalahan untuk perkiraan yang ditunjukkan pada Gambar 7-6. Perhatikan bahwa kesalahan bertambah saat Anda semakin jauh dari titik singgung (9, 3); juga, kesalahan tumbuh lebih cepat turun dari (9, 3) daripada naik dari (9, 3) — kesalahan sering tumbuh lebih cepat dalam satu arah daripada yang lain dengan pendekatan linier.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{7}&: \ 0.8\% \text{ error}\\
\sqrt{8}&: \ 0.2\% \text{ error}\\
\sqrt{10}&: \ 0.1\% \text{ error}\\
\sqrt{11}&: \ 0.5\% \text{ error}\\
\sqrt{12}&: \ 1.0\% \text{ error}
\end{aligned}
$$

Persamaan Pendekatan Linier: Berikut adalah bentuk umum persamaan tangen untuk pendekatan linier. Nilai suatu fungsi $f(x)$ dapat didekati dengan nilai tangen $l(x)$ di dekat titik singgung, $(x_0, f(x_0))$, di mana

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ini tidak terlalu rumit daripada yang terlihat. Ini hanyalah versi kalkulus yang disempurnakan dari persamaan kemiringan titik dari garis yang telah Anda ketahui sejak Aljabar I, $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan dipindahkan ke sisi kanan:

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

Persamaan aljabar ini dan persamaan di atas hanya berbeda pada simbol yang digunakan; arti dari kedua persamaan — istilah untuk istilah — adalah identik. Dan perhatikan bagaimana kedua persamaan tersebut menyerupai persamaan tangen pada Gambar 7-6.

Bila memungkinkan, cobalah untuk melihat aljabar dasar atau konsep geometri di jantung konsep kalkulus yang tampak mewah.

BAB 8
PENGANTAR INTEGRASI

Dalam Bab Ini

- Mengintegrasikan — menambahkan semuanya
- Perkiraan area
- Menggunakan integral tertentu untuk mendapatkan luas eksak

Jika Anda masih membaca, saya kira Anda selamat dari diferensiasi (Bab 4-7). Sekarang Anda memulai topik kalkulus utama kedua: integrasi. Sama seperti dua gagasan sederhana yang terletak di jantung diferensiasi — laju (seperti mil per jam) dan kemiringan kurva — integrasi juga dapat dipahami dalam dua gagasan sederhana: menjumlahkan potongan-potongan kecil sesuatu dan luas di bawah kurva .

8.1 INTEGRASI: HANYA TAMBAHAN MEWAH

Katakanlah Anda ingin menentukan volume alas lampu pada Gambar 8-1. Karena tidak ada rumus untuk volume bentuk aneh seperti itu, Anda tidak dapat menghitung volume secara langsung. Namun, Anda dapat menghitung volume dengan integrasi. Bayangkan bahwa alasnya dipotong menjadi irisan tipis horizontal, seperti yang ditunjukkan di sebelah kanan pada Gambar 8-1.

Apakah Anda melihat bagaimana setiap irisan berbentuk seperti panekuk tipis? Sekarang, karena ada rumus untuk volume panekuk (pancake hanyalah silinder yang sangat pendek), Anda dapat menentukan volume total alas hanya dengan menghitung volume setiap irisan berbentuk panekuk dan kemudian menjumlahkannya volume. Itulah integrasi singkatnya.

Gambar 8-1: Lampu dengan alas melengkung dan alasnya dipotong menjadi irisan horizontal tipis.

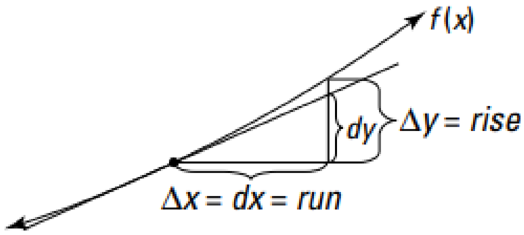
Apa yang menjadikan integrasi sebagai salah satu pencapaian besar dalam sejarah matematika adalah — tetap bersama lampu contoh — ini memberi Anda volume yang tepat dari dasar lampu dengan memotongnya menjadi irisan tipis yang tak terbatas jumlahnya. Jika Anda memotong lampu menjadi kurang dari jumlah irisan yang tak terbatas, Anda hanya bisa mendapatkan perkiraan volume yang sangat baik karena setiap irisan akan memiliki tepi melengkung yang aneh yang akan menyebabkan kesalahan kecil.

Integrasi memiliki simbol elegan: $\int$. Anda mungkin pernah melihatnya sebelumnya. Anda dapat menganggap simbol integrasi sebagai S memanjang untuk "jumlah". Jadi, untuk masalah lampu kami, Anda dapat menulis

$$\int_{\text{bottom}}^{\text{top}} dB = B$$

di mana dB berarti sedikit dasar — sebenarnya bagian yang sangat kecil. Jadi persamaannya hanya berarti bahwa jika Anda menjumlahkan semua bagian kecil alas dari bawah ke atas, hasilnya adalah B, volume seluruh alas.

Ini agak terlalu disederhanakan — saya bisa mendengar sirene polisi matematika sekarang — tetapi ini adalah cara yang baik untuk memikirkan integrasi. Omong-omong, memikirkan dB sebagai bagian kecil atau sangat kecil dari B adalah ide yang Anda lihat sebelumnya dengan diferensiasi (lihat Bab 4), di mana turunan atau kemiringan, $\frac{dy}{dx}$, sama dengan rasio sedikit y ke sedikit bit x, saat Anda mengecilkan tangga lereng ke ukuran yang sangat kecil — lihat Gambar 8-2.



Gambar 8-2: Dalam batas $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{a little bit of } y}{\text{a little bit of } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{rise}{run} = \text{slope.}$

Jadi, setiap kali Anda melihat sesuatu seperti

$$\int_a^b \textit{little piece of mumbo jumbo}$$

itu hanya berarti Anda menjumlahkan semua bagian kecil dari omong kosong dari a ke b untuk mendapatkan total semua omong kosong dari a ke b. Atau Anda mungkin melihat sesuatu seperti

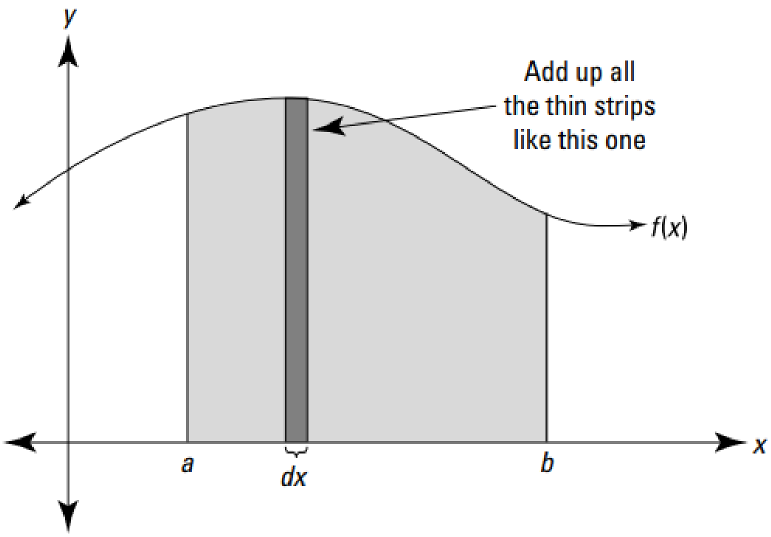
$$\int_{t=0}^{t=20} \textit{little piece of distance}$$

yang berarti menjumlahkan potongan-potongan kecil jarak yang ditempuh antara 0 dan 20 detik untuk mendapatkan total jarak yang ditempuh dalam rentang waktu tersebut.

Singkatnya - itu permainan kata-kata! — ekspresi matematika di sebelah kanan simbol integrasi selalu mewakili sedikit dari sesuatu, dan mengintegrasikan ekspresi seperti itu berarti menjumlahkan semua bagian kecil antara beberapa titik awal dan beberapa titik akhir.

8.2 MENEMUKAN AREA DI BAWAH KURVA

Arti paling mendasar dari integrasi adalah menjumlahkan. Dan ketika Anda menggambarkan integrasi pada grafik, Anda dapat melihat proses penjumlahan sebagai penjumlahan dari bagian-bagian kecil untuk sampai pada luas total di bawah kurva. Perhatikan Gambar 8-3.



Gambar 8-3: Mengintegrasikan $f(x)$ dari a ke b berarti mencari luasnya di bawah kurva antara a dan b.

Area yang diarsir pada Gambar 8-3 dapat dihitung dengan integral berikut:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Perhatikan persegi panjang tipis pada Gambar 8-3. Memiliki ketinggian $f(x)$dan lebar dx (sedikit x), jadi luasnya (*panjang × lebar*, tentu saja) diberikan oleh $f(x)dx$. Integral di atas memberitahu Anda untuk menjumlahkan luas semua strip persegi panjang sempit antara a dan b di bawah kurva (x). Saat strip semakin sempit, Anda mendapatkan perkiraan area yang lebih baik dan lebih baik. Kekuatan integrasi terletak pada kenyataan bahwa ia memberi Anda luas yang tepat dengan semacam menjumlahkan jumlah tak terbatas dari persegi panjang tipis tak berhingga.

Jika Anda sedang mengerjakan soal di mana sumbu x dan y diberi label dalam satuan panjang, katakanlah, kaki, maka setiap persegi panjang tipis berukuran begitu banyak kaki dengan banyak kaki, dan luasnya — *panjang × lebar* — adalah beberapa angka dari kaki persegi. Dalam hal ini, ketika Anda mengintegrasikan untuk mendapatkan luas total di bawah kurva antara a dan b, jawaban akhir Anda adalah jumlah — apa lagi? - daerah. Tetapi Anda dapat menggunakan skema penambahan luas persegi panjang ini untuk menjumlahkan sedikit apa pun — jarak, volume, atau energi, Misalnya. Dengan kata lain, area di bawah kurva tidak harus mewakili area sebenarnya.

Jika, misalnya, satuan pada sumbu x adalah jam dan sumbu y diberi label dalam mil per jam, maka, karena laju × waktu = jarak, luas setiap persegi panjang mewakili jumlah jarak, dan luas total memberi Anda total jarak yang ditempuh selama interval waktu tertentu. Atau jika sumbu x diberi label dalam jam dan sumbu y dalam kilowatt daya listrik — di mana kurva memberikan penggunaan daya sebagai fungsi waktu — maka luas setiap jalur persegi panjang (kilowatt × jam) mewakili sejumlah kilowatt-jam energi. Dalam hal ini, total area di bawah kurva memberi Anda jumlah total kilowatt-jam konsumsi energi antara dua titik waktu.

Berurusan Dengan Area Negatif

Dalam contoh yang melibatkan volume, jarak, dan energi (lihat dua bagian sebelumnya), Anda menambahkan bagian positif dari sesuatu. Ini biasa terjadi pada masalah praktis karena Anda tidak dapat, katakanlah, memiliki volume air negatif atau menggunakan jumlah kilowatt-jam yang negatif. Namun, terkadang Anda akan mengintegrasikan fungsi yang mengarah ke negatif — yang berada di bawah sumbu x. Inilah yang Anda lakukan.

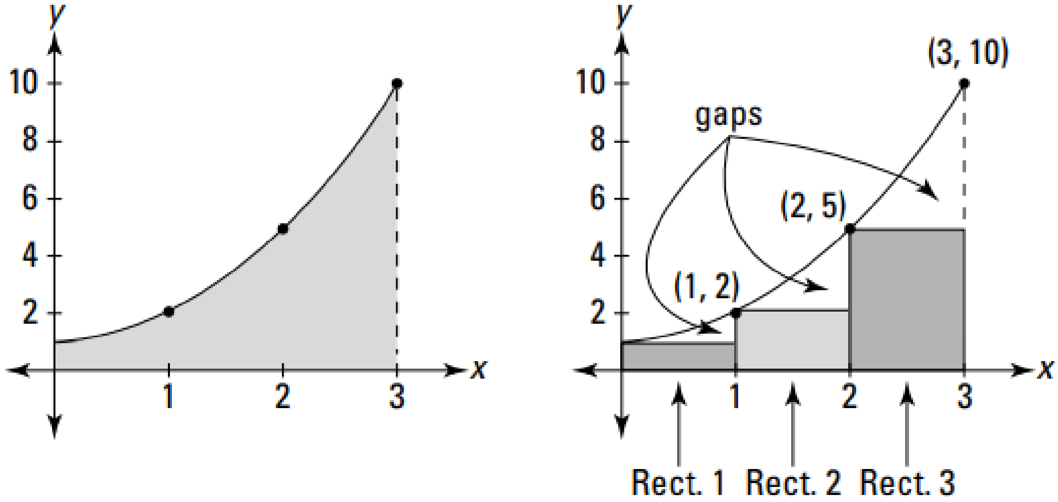
Saat menggunakan integrasi untuk menghitung area, area di bawah sumbu x dihitung sebagai area negatif. Luas total antara a dan b untuk beberapa kurva $f(x)$ — diberikan oleh integral $\int_a^b f(x)dx$— benar-benar luas bersih di mana luas total di bawah sumbu x (dan di atas kurva) dikurangi dari luas total di atas sumbu x (dan di bawah kurva).

8.3 PERKIRAAN AREA

Sebelum menjelaskan cara menghitung luas yang tepat, saya ingin menunjukkan kepada Anda cara memperkirakan luas. Metode aproksimasi berguna bukan hanya karena ia meletakkan dasar untuk metode eksak — integrasi — tetapi karena untuk beberapa kurva, integrasi tidak mungkin dilakukan, dan aproksimasi luas adalah yang terbaik yang dapat Anda lakukan.

Mendekati luas dengan jumlah kiri

Katakanlah Anda menginginkan area yang tepat di bawah kurva $f(x) = x^2 + 1$ antara 0 dan 3. Lihat daerah yang diarsir pada grafik di sebelah kiri pada Gambar 8-4.



Gambar 8-4: Luas persis di bawah $f(x) = x^2 + 1$ antara 0 dan 3 (kiri) diperkirakan dengan luas tiga persegi panjang (kanan).

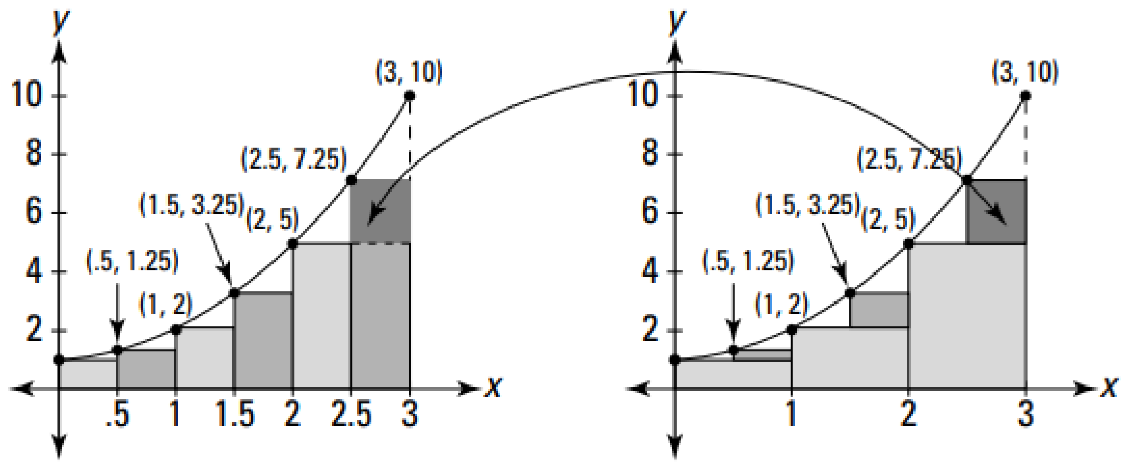
Anda bisa mendapatkan perkiraan kasar luas dengan menggambar tiga persegi panjang di bawah kurva, seperti yang ditunjukkan di sebelah kanan pada Gambar 8-4, dan kemudian menjumlahkan luasnya.

Persegi panjang pada Gambar 8-4 mewakili apa yang disebut jumlah kiri karena sudut kiri atas setiap persegi panjang menyentuh kurva. Setiap persegi panjang memiliki lebar 1 dan tinggi masing-masing diberikan oleh tinggi fungsi di tepi kiri persegi panjang. Jadi, persegi panjang nomor 1 memiliki tinggi $f(0) = 0^2 + 1 = 1$; luasnya ($tinggi \times lebar$) jadi , atau 1. Persegi panjang 2 memiliki tinggi $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, jadi luasnya , 2×1 atau 2. Dan persegi panjang 3 memiliki tinggi $(2) = 2^2 + 1 = 5$, jadi luasnya , atau 5. Menambahkan area memberi Anda 1 + 2 + 5, atau 8. Ini adalah perkiraan yang terlalu rendah dari total area di bawah kurva karena celah antara persegi panjang dan kurva.

Untuk perkiraan yang lebih baik, gandakan jumlah persegi panjang menjadi enam. Gambar 8-5 menunjukkan enam persegi panjang "kiri" di bawah kurva dan juga bagaimana mereka mulai mengisi tiga celah yang Anda lihat pada Gambar 8-4.

Lihat tiga persegi panjang kecil yang diarsir lebih gelap pada grafik di sebelah kanan pada Gambar 8-5? Mereka duduk di atas tiga persegi panjang dari Gambar 8-4, dan mereka mewakili berapa banyak area yang telah ditingkatkan dengan menggunakan enam persegi, bukan tiga.

Sekarang jumlahkan luas enam persegi panjang. Masing-masing memiliki lebar 0,5 dan tinggi $f(0), f(0.5), f(1), f(1.5)$, dan seterusnya. Saya akan mengampuni matematika. Inilah totalnya: 0,5 + 0,625 + 1 + 1,625 + 2,5 + 3,625 = 9,875. Ini adalah perkiraan yang lebih baik, tetapi masih terlalu rendah karena enam celah kecil yang dapat Anda lihat di grafik kiri pada Gambar 8-5.



Gambar 8-5: Enam persegi panjang "kiri" mendekati area di bawah $f(x) = x^2 + 1$

Tabel 8-1 menunjukkan perkiraan luas yang diberikan oleh 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, dan 384 persegi panjang. Anda tidak perlu menggandakan persegi panjang setiap kali — Anda dapat menggunakan sejumlah persegi panjang yang Anda inginkan. Saya hanya menyukai skema penggandaan karena, dengan setiap penggandaan, celah-celah disambungkan semakin banyak seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8-5.

Tabel 8-1 Perkiraan luas di bawah $(x) = x^2 + 1$. Diberikan dengan Semakin Banyaknya Persegi Panjang "Kiri"

Jumlah Persegi Panjang	*Perkiraan Area*
3	8
6	9.875
12	~10.906
24	~11.445
48	~11.721
96	~11.860
192	~11.930
384	~11.965

Aturan Persegi Panjang Kiri: Anda dapat memperkirakan luas yang tepat di bawah kurva antara a dan b, $\int_a^b f(x)dx$, dengan jumlah kiri persegi panjang yang diberikan oleh rumus berikut. Secara umum, semakin banyak persegi panjang, semakin baik perkiraannya.

$$L_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots\dots\dots+f(x_{n-1})\right]$$

Dimana n adalah jumlah persegi panjang, $\frac{b-a}{n}$ adalah lebar masing-masing persegi, dan nilai fungsi adalah tinggi persegi panjang.

Lihat kembali ke enam persegi panjang yang ditunjukkan pada Gambar 8-5. Lebar setiap persegi panjang sama dengan panjang rentang total dari 0 hingga 3 (yang tentu saja adalah 3 – 0, atau 3) dibagi dengan jumlah persegi panjang, 6. Itulah $\frac{b-a}{n}$ yang dilakukan dalam rumus.

Bagaimana dengan xs dengan subskrip? Koordinat x tepi kiri persegi panjang 1 pada Gambar 8-5 adalah x_0, tepi kanan persegi panjang 1 (sama dengan tepi kiri persegi panjang 2) adalah di x_1, tepi kanan persegi panjang 2 adalah di x_2, tepi kanan dari persegi panjang 3 adalah di x_3, dan seterusnya sampai ke tepi kanan persegi panjang 6, di x_6. Untuk enam persegi panjang pada Gambar 8-5, x_0 adalah 0, x_1 adalah 0,5, x_2 adalah 1, x_3 adalah 1,5, x_4 adalah 2, x_5 adalah 2,5, dan x_6 adalah 3. Ketinggian dari enam persegi panjang kiri pada Gambar 8-5 terjadi di tepi kirinya, yang berada di x_0 melalui x_5. Anda tidak menggunakan tepi kanan dari persegi panjang terakhir, x_6 , dalam jumlah kiri. Itu sebabnya daftar nilai fungsi dalam rumus berhenti di x_{n-1}.

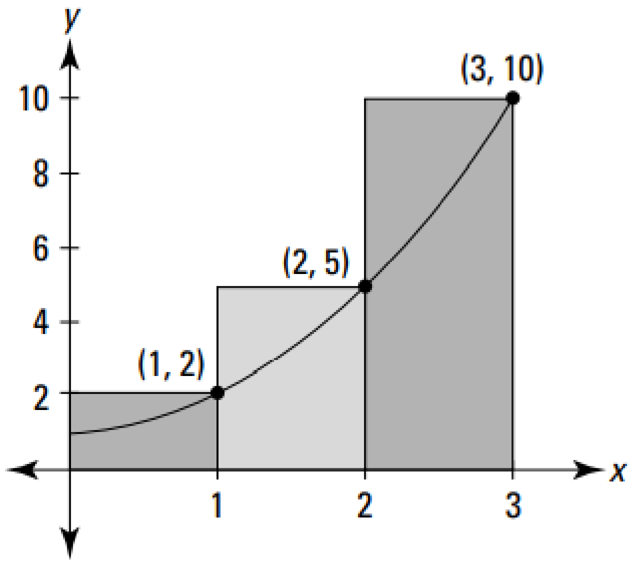
Berikut ini cara menggunakan rumus untuk enam persegi panjang pada Gambar 8-5:

$$
\begin{aligned}
L_6 &= \frac{3-0}{6}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f(0)+f(0.5)+f(1)+f(1.5)+f(2)+f(2.5)\right] \\
&= \frac{1}{2}(1+1.25+2+3.25+5+7.25) \\
&= \frac{1}{2}(19.75) \\
&= 9.875
\end{aligned}
$$

Seandainya saya mendistribusikan lebar 1/2 ke masing-masing ketinggian setelah baris ketiga dalam solusi itu, Anda akan melihat jumlah luas persegi panjang — terlihat tepat sebelum Gambar 8-5. Rumusnya menggunakan jalan pintas dengan menjumlahkan tinggi terlebih dahulu lalu mengalikan dengan lebarnya.

Mendekati luas dengan jumlah yang tepat

Sekarang mari kita perkirakan area yang sama di bawah $f(x) = x^2 + 1$ dari 0 hingga 3 dengan persegi panjang siku-siku. Metode ini bekerja seperti metode penjumlahan kiri kecuali bahwa setiap persegi panjang digambar sehingga sudut kanan atas menyentuh kurva. Lihat Gambar 8-6.



Gambar 8-6: Tiga persegi panjang siku-siku yang digunakan untuk memperkirakan area di bawah $f(x) = x^2 + 1$.

Ketinggian tiga persegi panjang pada Gambar 8-6 diberikan oleh nilai fungsi pada sisi kanannya: $f(1) = 2, f(2) = 5$, dan $f(3) = 10$. Setiap persegi panjang memiliki lebar 1, jadi luasnya adalah 2, 5, dan 10, yang totalnya 17. Tabel 8-2 menunjukkan perkiraan peningkatan yang Anda dapatkan dengan semakin banyak persegi panjang yang tepat.

Tabel 8-2 Perkiraan Area di bawah $f(x) = x^2 + 1$. Diberikan dengan Semakin Banyaknya Persegi Panjang "Kanan"

Jumlah Persegi Panjang	*Perkiraan Area*
3	17
6	14.375
12	~13.156
24	~12.570
48	~12.283
96	~12.141
192	~12.070
384	~12.035

Aturan Persegi Panjang Kanan: Anda dapat memperkirakan luas tepat di bawah kurva antara a dan b, $\int_a^b f(x)dx$, dengan jumlah persegi panjang siku-siku yang diberikan oleh rumus berikut. Secara umum, semakin banyak persegi panjang, semakin baik perkiraannya.

$$R_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots\ldots\ldots+f(x_n)\right]$$

di mana n adalah jumlah persegi panjang, $\frac{b-a}{n}$ adalah lebar masing-masing, dan nilai fungsi adalah tinggi persegi panjang.

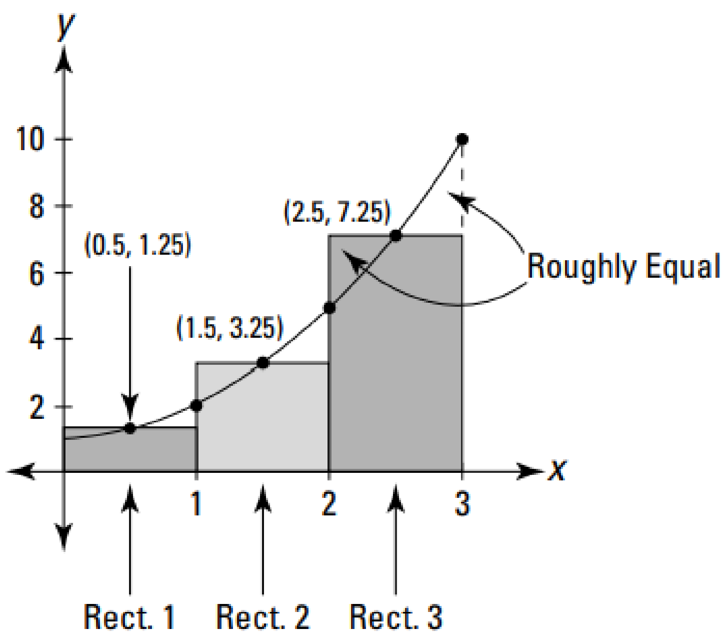
Jika Anda membandingkan rumus ini dengan rumus untuk jumlah persegi panjang kiri, Anda mendapatkan gambaran lengkap tentang subskrip tersebut. Kedua rumus itu sama kecuali satu hal. Lihatlah jumlah nilai fungsi di kedua rumus. Rumus jumlah kanan memiliki satu nilai, $f(x_n)$, yang tidak dimiliki rumus jumlah kiri, dan rumus jumlah kiri memiliki satu nilai, $f(x_0)$, yang tidak dimiliki rumus jumlah kanan. Semua nilai fungsi di antara keduanya muncul di kedua rumus. Anda dapat mengatasinya dengan membandingkan tiga persegi panjang kiri dari Gambar 8-4 dengan tiga persegi panjang kanan dari Gambar 8-6. Area dan totalnya, yang kami hitung sebelumnya, adalah:

Tiga persegi panjang kiri:	1 + 2 + 5 = 8
Tiga persegi panjang siku-siku:	2 + 5 + 10 = 17

Jumlah luasnya sama kecuali persegi panjang paling kiri dan persegi panjang paling kanan. Kedua penjumlahan tersebut termasuk persegi panjang dengan luas 2 dan 5. Lihatlah bagaimana persegi panjang dibangun — persegi kedua dan ketiga pada Gambar 8-4 sama dengan persegi panjang pertama dan kedua pada Gambar 8-6.

Mendekati luas dengan jumlah titik tengah

Cara ketiga untuk memperkirakan area dengan persegi panjang adalah dengan membuat setiap persegi panjang melintasi kurva di titik tengah sisi atasnya. Jumlah titik tengah adalah perkiraan luas yang jauh lebih baik daripada jumlah kiri atau kanan. Gambar 8-7 menunjukkan alasannya.



Gambar 8-7: Tiga persegi panjang titik tengah memberi Anda perkiraan yang jauh lebih baik dari luas di bawah $f(x) = x^2 + 1$.

Anda dapat melihat pada Gambar 8-7 bahwa bagian dari setiap persegi panjang yang berada di atas kurva terlihat memiliki ukuran yang sama dengan jarak antara persegi panjang dan kurva. Jumlah titik tengah menghasilkan perkiraan yang baik karena kedua kesalahan ini secara kasar saling meniadakan.

Untuk tiga persegi panjang pada Gambar 8-8, lebarnya adalah 1 dan tinggi adalah , $f(0.5) = 125, f(1.5) = 3.25$, dan $f(2.5) = 7.25$. Luas totalnya menjadi 11,75. Tabel 8-3 mencantumkan jumlah titik tengah untuk jumlah persegi panjang yang sama yang digunakan dalam Tabel 8-1 dan 8-2.

Tabel 8-3 Perkiraan Area di bawah $f(x) = x^2 + 1$. Diberikan dengan Semakin Banyaknya Persegi Panjang "Titik Tengah"

Jumlah Persegi Panjang	***Perkiraan Area***
3	11.75
6	11.9375
12	~11.9844
24	~11.9961
48	~11.9990
96	~11.9998
192	~11.9999
384	~11.99998

Maaf untuk memberikan akhir, tetapi Anda akan segera melihat bahwa area yang tepat adalah 12. Dan untuk melihat seberapa cepat perkiraan titik tengah mendekati jawaban yang tepat dari 12 daripada perkiraan kiri atau kanan, bandingkan ketiga tabel. Kesalahan dengan 6 persegi panjang titik tengah hampir sama dengan kesalahan dengan 192 persegi panjang kiri atau kanan!

Aturan Titik Tengah: Anda dapat memperkirakan luas yang tepat di bawah kurva antara a dan b, $\int_a^b f(x)dx$, dengan jumlah persegi panjang titik tengah yang diberikan oleh rumus berikut. Secara umum, semakin banyak persegi panjang, semakin baik perkiraannya.

$$M_n = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]$$

di mana n adalah jumlah persegi panjang, $\frac{b-a}{n}$ adalah lebar masing-masing, dan nilai fungsi adalah tinggi persegi panjang. Jumlah kiri, kanan, dan titik tengah disebut jumlah Riemann setelah matematikawan besar Jerman G. F. B. Riemann (1826–66).

8.4 NOTASI PENJUMLAHAN

Untuk menjumlahkan rangkaian angka yang panjang seperti area persegi panjang di kiri, kanan, atau jumlah titik tengah, notasi penjumlahan atau sigma berguna.

Menyimpulkan dasar-dasarnya

Katakanlah Anda ingin menjumlahkan 100 kelipatan pertama dari 5 — yaitu dari 5 hingga 500. Anda dapat menuliskan jumlahnya seperti ini:

$$5 + 10 + 15 + 20 + 25 + \ldots\ldots\ldots + 490 + 495 + 500$$

Tetapi dengan notasi sigma, jumlahnya jauh lebih padat.

$$\sum_{i=1}^{100} 5i$$

Notasi ini hanya memberitahu Anda untuk mencolokkan 1 untuk i di 5i, lalu hubungkan 2 ke i di 5i, lalu 3, lalu 4, hingga 100. Kemudian Anda menjumlahkan hasilnya. Jadi itu 5×1 plus 5×2 plus 5×3, dan seterusnya, hingga. Ini sama saja dengan menuliskan jumlah di jalan yang panjang. Omong-omong, huruf i tidak ada artinya. Anda dapat menulis jumlah dengan j, $\sum_{j=1}^{100} 5j$, atau huruf lain yang Anda suka.

Ini satu lagi. Jika Anda ingin menambahkan $10^2 + 11^2 + 12^2 +$ ________ $+ 29^2 + 30^2$, Anda dapat menulis jumlah dengan notasi sigma sebagai berikut:

$$\sum_{k=10}^{30} k^2$$

Menulis penjumlahan Riemann dengan notasi sigma

Anda dapat menggunakan notasi sigma untuk menuliskan jumlah persegi panjang kanan untuk kurva $x^2 + 1$ dari bagian "Area Perkiraan". Ingat rumus untuk jumlah yang tepat dari bagian "Perkiraan luas dengan jumlah yang tepat":

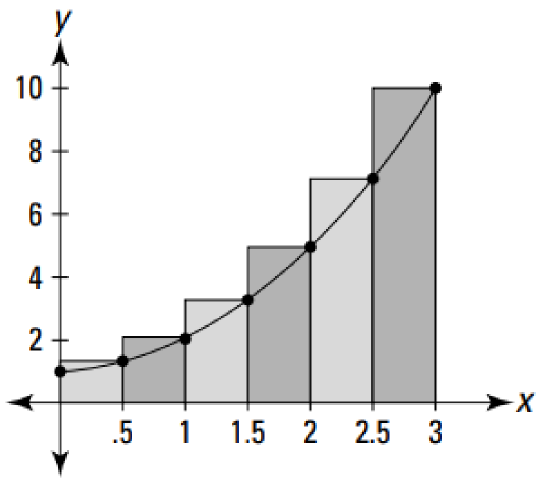
$$R_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_n)\right]$$

Berikut rumus yang sama yang ditulis dengan notasi sigma:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

Sekarang kerjakan ini untuk enam persegi panjang kanan pada Gambar 8-8. Anda mencari area di bawah $x^2 + 1$ antara 0 dan 3 dengan enam persegi panjang, sehingga lebar masing-masing, $\frac{b-a}{n}$, adalah $\frac{3-0}{6}$, atau $\frac{3}{6}$, atau $\frac{1}{2}$ Jadi sekarang kamu punya

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6}\left[f(x_i)\cdot\frac{1}{2}\right]$$



Gambar 8-8: Enam persegi panjang siku-siku mendekati luas di bawah $f(x) = x^2 + 1$ antara 0 dan 3.

Sekarang, karena lebar masing-masing persegi panjang adalah $\frac{1}{2}$, maka sisi kanan keenam persegi panjang jatuh pada enam kelipatan pertama dari $\frac{1}{2}$: 0,5, 1, 1.5, 2, 2.5, dan 3. Angka-angka ini adalah koordinat x dari enam titik x_1 melalui x_6; mereka dapat dihasilkan oleh ekspresi , di mana $\frac{1}{2}$i sama dengan 1 hingga 6. Anda dapat memeriksanya ini bekerja dengan memasukkan 1 untuk $\frac{1}{2}$i in , lalu 2, lalu 3, hingga 6. Jadi sekarang Anda dapat mengganti rumus dalam dengan $\frac{1}{2}$i, memberi Anda

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6}\left[f\left(\frac{1}{2}i\right)\cdot\frac{1}{2}\right]$$

Fungsi kami,$f(x)$, adalah $x^2 + 1$ jadi , dan jadi sekarang Anda dapat menulis

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6}\left[\left(\left(\frac{1}{2}i\right)^2 + 1\right)\cdot\frac{1}{2}\right]$$

Jika Anda memasukkan 1 ke i, lalu 2, 3, hingga 6 dan menghitungnya, Anda mendapatkan jumlah luas persegi panjang pada Gambar 8-8. Notasi sigma ini hanyalah cara yang bagus untuk menulis jumlah dari enam persegi panjang.

Apakah kita bersenang-senang? Tunggu, itu semakin buruk. Sekarang Anda akan menulis jumlah umum untuk bilangan yang tidak diketahui (n) dari persegi panjang siku-siku. Rentang total area yang dimaksud adalah 3, kan?

Anda membagi rentang ini dengan jumlah persegi panjang untuk mendapatkan lebar setiap persegi panjang. Dengan 6 persegi panjang, lebar masing-masing adalah $\frac{3}{6}$; dengan n persegi panjang, lebar masing-masing adalah $\frac{3}{n}$. Dan tepi kanan dari n persegi panjang dihasilkan oleh , karena $\frac{3}{n}$i sama dengan 1 sampai n. Itu memberimu

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{3}{n}i\right)\cdot\frac{3}{n}\right]$$

Atau karena $f(x) = x^2 + 1$,

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\left(\frac{3}{n}i\right)^2+1\right)\cdot\frac{3}{n}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{9i^2}{n^2}+1\right)\cdot\frac{3}{n}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{27i^2}{n^3}+\frac{3}{n}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{27i^2}{n^3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n} \quad \text{(take my word for it)} \\ &= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}1 \end{aligned}$$

Untuk langkah terakhir ini, Anda menarik $\frac{27}{n^3}$ dan melalui tanda penjumlahan $\frac{27}{n}$— Anda diizinkan untuk menarik apa pun kecuali fungsi i, yang disebut indeks penjumlahan. Juga, penjumlahan kedua pada langkah terakhir hanya memiliki 1 setelahnya dan tidak ada i. Jadi tidak ada tempat untuk memasukkan nilai i. Jangan khawatir — yang Anda lakukan hanyalah menjumlahkan n 1, yang sama dengan n (saya melakukan ini dalam satu menit).

Dengan sulap, Anda sekarang akan mengubah jumlah Riemann sebelumnya menjadi rumus dalam bentuk n. Jumlah n bilangan kuadrat pertama, $1^2 + 2^2 + 3^2 +$ _______ $+ n^2$, sama dengan $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$(rumus yang mungkin ingin Anda hafal). Jadi, Anda dapat mengganti ekspresi itu $\sum_{i=1}^{n} i^2$ di baris terakhir dari solusi notasi sigma, dan pada saat yang sama mengganti n untuk $\sum_{i=1}^{n} 1$

$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n} \cdot n \\
&= \frac{27}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) + 3 \qquad \text{(OK, I admit it, I didn't show all my work.)} \\
&= 9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} + 3 \\
&= 12 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2}
\end{aligned}
$$

Akhirnya! Ini adalah rumus untuk luas n persegi panjang siku-siku antara 0 dan 3 di bawah fungsi $x^2 + 1$. Anda dapat menggunakan rumus ini untuk menghasilkan hasil yang diberikan pada Tabel 8-2. Tetapi setelah Anda mendapatkan rumus seperti itu, tidak ada gunanya membuat tabel perkiraan area, karena Anda dapat menggunakan rumus untuk menentukan area yang tepat. Saya mendapatkan itu di bagian selanjutnya.

Tapi pertama-tama, berikut adalah rumus untuk n persegi panjang kiri dan n persegi panjang titik tengah antara 0 dan 3 di bawah fungsi $x^2 + 1$. Rumus-rumus ini menghasilkan perkiraan luas pada Tabel 8-1 dan 8-3.

$$
\begin{aligned}
L_n &= 12 - \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \\
M_n &= 12 - \frac{9}{4n^2}
\end{aligned}
$$

8.5 MENCARI LUAS EKSAK DENGAN INTEGRAL PASTI

Seperti yang Anda lihat dengan persegi panjang kiri, kanan, dan titik tengah di bagian "Area Perkiraan", semakin banyak persegi panjang yang Anda miliki, semakin baik pendekatannya. Jadi, “semua” yang harus Anda lakukan untuk mendapatkan luas tepat di bawah kurva adalah dengan menggunakan jumlah persegi panjang yang tak terhingga. Sekarang, Anda tidak dapat benar-benar melakukan itu, tetapi dengan penemuan limit yang fantastis, inilah yang terjadi. Berikut adalah definisi integral tertentu yang digunakan untuk menghitung luas eksak.

Integral Pasti (Definisi "sederhana"): Luas eksak di bawah kurva antara a dan b diberikan oleh integral tertentu, yang didefinisikan sebagai limit dari jumlah Riemann:

$$
\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]
$$

Apakah itu keindahan atau apa? Penjumlahan di atas identik dengan rumus untuk n persegi panjang siku-siku, , dari beberapa halaman ke belakang. Satu-satunya perbedaan adalah bahwa Anda mengambil batas rumus itu karena jumlah persegi panjang mendekati tak terhingga.

Definisi integral tentu ini adalah versi sederhana berdasarkan rumus persegi panjang siku-siku. Saya akan melewatkan definisi McCoy nyata yang lebih rumit karena Anda tidak perlu menggunakannya. Semua jumlah Riemann memiliki batas yang sama — tidak masalah jenis persegi panjang apa yang Anda gunakan — jadi Anda sebaiknya menggunakan definisi persegi panjang kanan ini.

Di sini, akhirnya $x^2 + 1$, adalah area yang tepat di bawah antara 0 dan 3:

$$\int_0^3 \left(x^2+1\right) dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(x_i\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(12 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \right)$$

(Inilah yang kami dapatkan di bagian "Menulis jumlah Riemann dengan notasi sigma" setelah semua langkah itu.)

$$= 12 + \frac{27}{2\cdot\infty} + \frac{9}{2\cdot\infty^2}$$
$$= 12 + \frac{27}{\infty} + \frac{9}{\infty}$$

(Ingat, dalam soal limit, bilangan apa pun yang dibagi tak terhingga sama dengan nol.)

$$= 12 + 0 + 0$$

$$= 12$$

Kejutan besar.

BAB 9
INTEGRASI: DIFERENSIASI MUNDUR

Dalam Bab Ini

- Antidiferensiasi — menempatkan 'er secara terbalik
- Menggunakan fungsi area
- Mengenal Teorema Dasar Kalkulus

Bab 8 menunjukkan cara yang sulit untuk menghitung luas di bawah kurva menggunakan definisi formal integrasi — batas jumlah Riemann. Dalam bab ini, saya melakukannya dengan cara yang mudah, mengambil keuntungan dari salah satu penemuan terpenting dalam matematika — bahwa integrasi hanyalah diferensiasi terbalik.

9.1 ANTIDIFERENSIASI: DIFERENSIASI TERBALIK

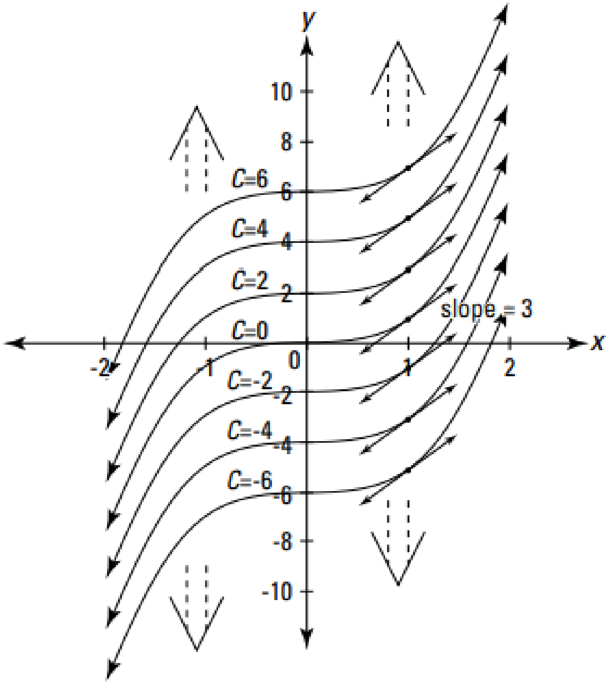
Antidiferensiasi hanyalah diferensiasi mundur. Turunan dari sin x adalah cos x, jadi antiturunan dari cos x adalah sin x; turunan dari x^3 adalah $3x^2$, jadi antiturunan dari $3x^2$ adalah x^3— Anda hanya mundur. . . dengan satu putaran: Turunan dari x^3+10 juga $3x^2$, seperti turunan dari x^3-5. Setiap fungsi dari bentuk x^3+C, di mana C adalah bilangan apa pun, memiliki turunan dari $3x^2$Jadi, setiap fungsi tersebut merupakan antiturunan dari $3x^2$.

Integral Tak tentu: Integral tak tentu dari suatu fungsi (x) , ditulis sebagai $\int f(x)dx$, adalah keluarga dari semua antiturunan dari fungsi tersebut. Misalnya, karena turunan dari x^3 adalah x^2, integral tak tentu dari $3x^2$ adalah x^3+C , dan Anda menulis

$$\int 3x^2dx = x^3 + C$$

Anda mungkin mengenali simbol integrasi ini, $\int$ dari yang pastiintegral dalam Bab 8. Simbol integral tertentu, bagaimanapun, berisi dua angka kecil seperti itu memberitahu Anda untuk menghitung daerah fungsi antara dua bilangan, yang disebut $\int_4^{10}$ batas-batas integrasi. Versi telanjang dari simbol, $\int$, menunjukkan integral tak tentu atau antiturunan. Bab ini adalah tentang hubungan intim antara dua simbol ini.

Gambar 9-1 menunjukkan keluarga antiturunan parabola $3x^2$, yaitu x^3. Perhatikan bahwa keluarga kurva ini memiliki jumlah kurva yang tak terbatas. Mereka naik dan turun selamanya dan sangat padat. Kesenjangan vertikal 2 unit antara setiap kurva pada Gambar 9-1 hanyalah alat bantu visual.

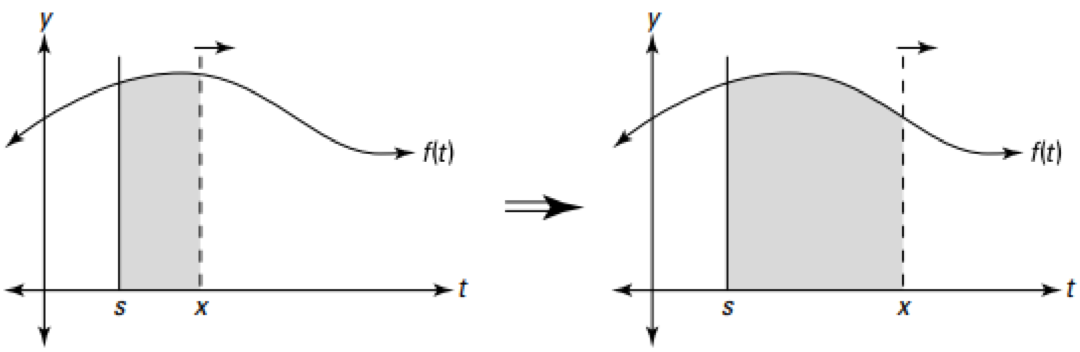


Gambar 9-1: Keluarga kurva $x^3 + C$. Semua fungsi ini memiliki turunan yang sama, $3x^2$.

Kurva atas pada grafik adalah $x^3 + 6$; yang di bawahnya adalah $x^3 + 4$; yang paling bawah adalah $x^3 - 6$. Dengan aturan pangkat, ketiga fungsi ini, serta semua fungsi lainnya dalam keluarga fungsi ini, memiliki turunan dari $3x^2$. Sekarang perhatikan kemiringan masing-masing kurva di mana x samadengan 1 (lihat tangen yang digambar pada kurva). Turunan setiap kurva adalah $3x^2$, jadi ketika x sama dengan 1, kemiringan setiap kurva adalah $3 \cdot 1^2$., atau 3. Jadi, semua tangen kecil ini sejajar. Tidak peduli berapa nilai x yang Anda pilih, tangen seperti ini akan sejajar. Ini adalah cara visual untuk memahami mengapa masing-masing kurva ini memiliki turunan yang sama, dan, dengan demikian, mengapa setiap kurva merupakan antiturunan dari fungsi yang sama.

9.2 FUNGSI AREA YANG MENGGANGGU

Topik ini cukup rumit. Kenakan topi berpikir Anda. Katakanlah Anda memiliki fungsi lama, $f(t)$. Bayangkan bahwa pada beberapa nilai t, sebut saja s, Anda menggambar garis vertikal tetap. Lihat Gambar 9-2.



Gambar 9-2: Area di bawah f antara s dan x tersapu oleh garis bergerak di x.

Kemudian Anda mengambil garis vertikal bergerak, mulai dari titik yang sama, s (untuk titik awal), dan seret ke kanan, menyapu area yang lebih besar dan lebih besar di bawah kurva. Area ini merupakan fungsi dari x, posisi garis bergerak. Dalam simbol, Anda menulis

$$A_f(x) = \int_s^x f(t)\,dt$$

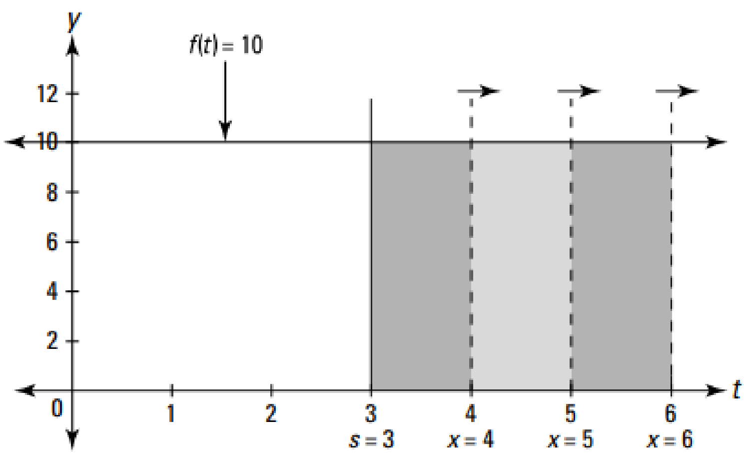
Perhatikan bahwa t adalah variabel input $f(t)$ di bukan x karena x sudah diambil — itu adalah variabel input di $A_f(x)$. Sub-script f di A_f menunjukkan bahwa $A_f(x)$ adalah fungsi area untuk kurva tertentu f atau $f(t)$. dt adalah kenaikan kecil di sepanjang sumbu t — sebenarnya kenaikan yang sangat kecil.

Berikut adalah contoh sederhana untuk memastikan Anda memahami cara kerja fungsi area. Katakanlah Anda memiliki fungsi sederhana, $f(t) = 10$ — yaitu garis horizontal di *y* = 10. Jika Anda menyapu luasan yang dimulai dari s = 3, Anda mendapatkan fungsi luas berikut:

$$A_f(x) = \int_3^x 10\,dt$$

Anda dapat melihat bahwa luas yang tersapu dari 3 ke 4 adalah 10 karena, dalam menyeret garis dari 3 ke 4, Anda menyapu sebuah persegi panjang dengan lebar 1 dan tinggi 10, yang memiliki luas 1 kali 10, atau 10. Lihat Gambar 9-3.

Jadi, $A_f(4)$, area yang tersapu saat Anda menekan 4, sama dengan 10. $A_f(5)$ sama dengan 20 karena ketika Anda menyeret garis ke 5, Anda telah menyapu persegi panjang dengan lebar 2 dan tinggi 10, yang memiliki luas 2 kali 10, atau 20. $A_f(6)$ sama dengan 30, dan seterusnya.



Gambar 9-3: Area di bawah f = 10 antara 3 dan x disapu oleh garis vertikal yang bergerak di x.

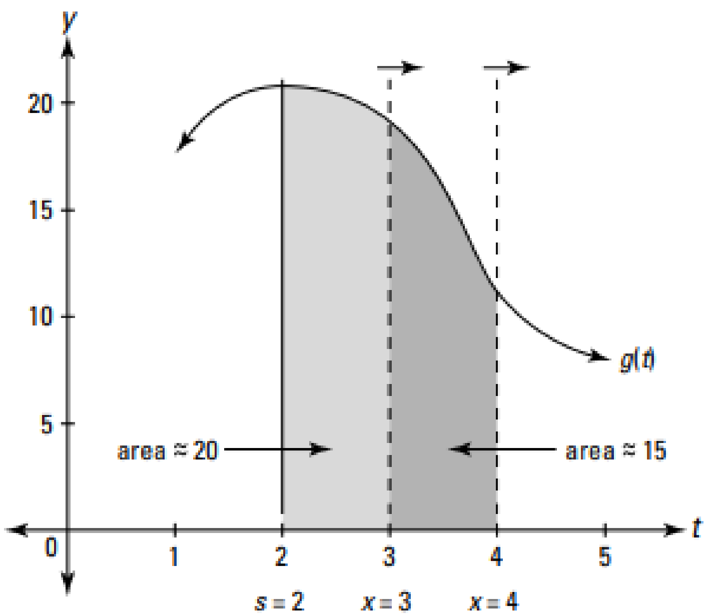
Sekarang, bayangkan Anda menyeret garis dengan kecepatan satu unit per detik. Anda mulai dari x = 3, dan Anda menekan 4 pada 1 detik, 5 pada 2 detik, 6 pada 3 detik, dan seterusnya. Berapa banyak area yang Anda sapu per detik? Sepuluh unit persegi per detik karena setiap detik Anda menyapu persegi panjang 1-kali-10 lainnya. Perhatikan — ini sangat besar — bahwa karena lebar setiap persegi panjang yang Anda sapukan adalah 1, luas setiap persegi panjang — yang diberikan oleh tinggi kali lebar — sama dengan tingginya karena setiap kali 1 sama dengan dirinya sendiri.

Baik, apakah Anda duduk? Anda telah mencapai salah satu dari yang besar Ah ha! momen dalam sejarah matematika. Ingatlah bahwa turunan adalah tingkat. Jadi, karena laju pertambahan fungsi area sebelumnya adalah 10 satuan kuadrat per detik, Anda dapat mengatakan bahwa turunannya sama dengan 10. Jadi, Anda dapat menulis

$$\frac{d}{dx}A_f(x)=10$$

Inilah hal yang penting: Laju atau turunan dari 10 ini sama dengan fungsi aslinya $f(t) = 10$ karena saat Anda melintasi 1 unit, Anda menyapu persegi panjang yang memiliki luas 10, tinggi dari fungsi tersebut.

Ini berfungsi untuk fungsi apa pun, bukan hanya garis horizontal. Perhatikan fungsi $g(t)$ dan fungsi $A_g(x)$ luasnya yang menyapu luasan yang dimulai dari s = 2 pada Gambar 9-4.



Gambar 9-4: Area di bawah g antara 2 dan x disapu oleh garis vertikal yang bergerak di x.

Anda dapat melihat bahwa $A_g(3)$ itu adalah sekitar 20 karena area yang tersapu antara 2 dan 3 memiliki lebar 1 dan bagian atas yang melengkung dari "persegi panjang" memiliki tinggi rata-rata sekitar 20. Jadi, selama interval ini, laju pertumbuhannya $A_g(x)$ adalah sekitar 20 unit persegi per detik. Antara 3 dan 4, Anda menyapu sekitar 15 satuan luas persegi karena itu kira-kira tinggi rata-rata $g(t)$ antara 3 dan 4. Jadi, selama kedua nomor dua — interval dari x = 3 ke x = 4 — laju pertumbuhannya $A_g(x)$adalah sekitar 15.

Laju luas yang tersapu di bawah kurva oleh fungsi luas pada nilai x yang diberikan sama dengan tinggi kurva pada nilai x tersebut.

9.3 TEOREMA DASAR

Membunyikan terompet! Sekarang setelah Anda melihat hubungan antara laju pertumbuhan fungsi area dan ketinggian kurva yang diberikan, Anda siap untuk apa yang dikatakan beberapa orang sebagai salah satu teorema terpenting dalam sejarah matematika: **Teorema Dasar Kalkulus:** Diberikan fungsi luas A_f yang menyapu luas di bawah $f(t)$,

$$A_f(x) = \int_s^x f(t)dt,$$

,

tingkat di mana area tersapu sama dengan ketinggian fungsi aslinya. Jadi, karena laju adalah turunan, maka turunan dari fungsi luas sama dengan fungsi asal:

$$\frac{d}{dx}A_f(x) = f(x).$$

.

Karena $A_f(x) = \int_s^x f(t)$, Anda juga dapat menulis persamaan di atas sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}\int_s^x f(t)dt = f(x)$$

Sekarang, karena turunan dari $A_f(x)$ adalah $f(x)$, $A_f(x)$didefinisikan sebagai antiturunan dari $f(x)$. Lihat cara kerjanya dengan kembali ke fungsi sederhana dari bagian sebelumnya, $f(x) = 10$, dan fungsi luasnya, $A_f(x) = \int_s^x 10dt$.

Menurut Teorema Dasar, $\frac{d}{dx}A_f(x) = 10$. Jadi harus merupakan antiturunan dari 10; dengan kata lain, adalah fungsi yang turunannya adalah 10. Karena setiap fungsi berbentuk 10x + C, di mana C adalah suatu bilangan, memiliki turunan dari 10, anti-turunan dari 10 adalah 10x + C. Bilangan tertentu C tergantung pada pilihan s Anda, titik di mana Anda mulai menyapu area. Untuk pilihan s tertentu, fungsi area akan menjadi satu fungsi (dari semua fungsi dalam keluarga kurva 10x + C) yang memotong sumbu x di s. Untuk mengetahui C, atur antiturunan sama dengan nol, masukkan nilai s ke x, dan selesaikan untuk C.

Untuk fungsi ini dengan antiturunan 10x + C, jika Anda mulai menyapu luas di, misalkan, s = 0, maka , $10 \cdot 0 + C = 0$ jadi C = 0, dan demikian $A_f(x) = \int_s^x 10dt$, atau hanya 10x. Jika sebaliknya Anda mulai menyapu area di $s = -2$ dan mendefinisikan fungsi area baru, $B_f(x) = \int_{-2}^x 10dt$, maka $10 \cdot (-2) + C = 0$, jadi C sama dengan 20 dan $B_f(x)$ adalah 10x + 20. Fungsi luas ini adalah 20 lebih dari $A_f(x)$, yang dimulai pada s = 0, karena jika Anda mulai dari , Anda telah menyapu luas 20 pada saat Anda mencapai nol.

Dan jika Anda mulai menyapu luasan pada s = 3, $10 \cdot 3 + C = 0$, Jadi $C = -30$ dan fungsi luasnya adalah $C_f(x) = \int_3^x 10dt = 10x - 30$. Ini fungsi 30 kurang dari aktif $A_f(x)$ karena dengan $C_f(x)$, Anda kehilangan persegi panjang 3-kali-10 antara 0 dan 3 yang $A_f(x)$ dimilikinya.

Luas daerah yang tersapu di bawah garis mendatar $f(t)$, dari beberapa bilangan s sampai x, diberikan oleh antiturunan dari 10, yaitu 10x + C, dimana nilai C tergantung dari mana Anda mulai menyapu daerah tersebut.

Untuk contoh selanjutnya, perhatikan kembali parabola $x^2 + 1$, teman kita dari Bab 8, dan pembahasan penjumlahan Riemann. Balik kembali ke Gambar 8-5. Sekarang Anda akhirnya dapat menghitung luas yang tepat (dari 0 hingga 3) dalam grafik itu dengan cara yang mudah.

Fungsi area untuk menyapu area di bawah $x^2 + 1$ adalah $A_f(x) = \int_s^x (t^2 + 1)$ Dengan Teorema Dasar, $\frac{d}{dx} A_f(x) = x^2 + 1$, dan juga A_f merupakan antiturunan dari $x^2 + 1$. Setiap fungsi bentuk $\frac{1}{3}x^3 + x + C$ memiliki turunan dari $x^2 + 1$ (coba), jadi itu antiturunannya. Untuk Gambar 8-5, Anda ingin untuk menyapu area mulai dari 0, jadi s = 0. Colokkan 0 ke antiturunan dan selesaikan untuk C: $\frac{1}{3}0^3 + 0 + C = 0$, jadi C = 0, dan dengan demikian

$$A_f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)dt = \frac{1}{3}x^3 + x$$

Area yang tersapu dari 0 ke 3 — yang kami lakukan dengan cara yang sulit di Bab 8 dengan menghitung batas jumlah Riemann — adalah sederhana $A_f(x)$:

$$\begin{aligned} A_f(x) &= \frac{1}{3}x^3 + x \\ A_f(3) &= \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 \\ &= 9 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Itu jauh lebih sedikit pekerjaan daripada melakukannya dengan cara yang sulit. Dan setelah Anda mengetahui fungsi area yang dimulai dari nol, $\int_0^x (t^2 + 1)dt = \frac{1}{3}x^3 + x$, mudah untuk menghitung luas bagian lain di bawah parabola yang tidak dimulai dari nol. Katakanlah Anda menginginkan area di bawah parabola antara 2 dan 3. Anda dapat menghitungnya dengan mengurangkan area antara 0 dan 2 dari area antara 0 dan 3. Anda baru saja menghitung luasnya antara 0 dan 3 — itu 12. Dan luas antara 0 dan 2 adalah $A_f(2) = \frac{1}{3}2^3 + 2 = 4\,{}^2/_3$. Jadi luas daerah antara 2 dan 3 adalah $12 - 4\,{}^2/_3$, atau $7\,{}^1/_3$. Metode pengurangan ini membawa kita ke topik berikutnya — Teorema Dasar versi kedua.

Teorema Dasar: Ambil Dua

Sekarang kita akhirnya sampai pada teorema integrasi pintasan super-duper. Tapi pertama-tama peringatan. . . .

Saat menggunakan fungsi area, versi pertama Teorema Dasar Kalkulus, atau versi kedua, area di bawah sumbu x dihitung sebagai area negatif.

Teorema Dasar Kalkulus (versi pintasan):

Misalkan F adalah antiturunan dari fungsi f; kemudian

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Teorema ini memberi Anda jalan pintas super untuk menghitung integral tertentu seperti $\int_2^3 (x^2+1)dx$, luas di bawah parabola x^2+1 antara 2 dan 3. Seperti yang saya tunjukkan di bagian sebelumnya, Anda bisa mendapatkan area ini dengan mengurangkan area antara 0 dan 2 dari area antara 0 dan 3, tetapi untuk melakukan itu Anda perlu mengetahui bahwa fungsi area tertentu menyapu area awal di nol, $\int_0^x (t^2+1)dt$ adalah $\frac{1}{3}x^3 + x$ (dengan nilai C nol).

Keindahan teorema pintasan adalah Anda bahkan tidak perlu menggunakan fungsi area seperti $A_f(x) = \int_0^x (t^2+1)dt$. Anda hanya menemukan antiturunan, F(*x*), dari fungsi Anda, dan melakukan pengurangan, $F(b)$ – $F(a)$. Antiturunan paling sederhana untuk digunakan adalah antiturunan di mana C = 0. Jadi, inilah cara Anda menggunakan teorema untuk mencari luas di bawah parabola kita dari 2 hingga 3. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ adalah anti-turunan dari jadi, x^2+1 dengan teorema,

$$\int_2^3 \left(x^2+1\right)dx = F(3) - F(2)$$

$F(3) - F(2)$dapat ditulis sebagai $\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_2^3$, dan dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int_2^3 \left(x^2+1\right)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{3}\cdot 3^3 + 3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2\right) \\ &= 12 - 4\tfrac{2}{3} \\ &= 7\tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

Memang, ini adalah perhitungan yang sama yang saya lakukan di bagian sebelumnya menggunakan fungsi area dengan s = 0, tetapi itu hanya karena untuk fungsi x^2+1, ketika s adalah nol, C juga nol. Ini semacam kebetulan, dan itu tidak berlaku untuk semua fungsi. Tetapi terlepas dari fungsinya, pintasannya berfungsi, dan Anda tidak perlu khawatir tentang fungsi area atau s atau C. Yang Anda lakukan hanyalah $F(b) - F(a)$.

Berikut ini contoh lain: Berapa luasnya di bawah $f(x) = e^x$ antara x = 3 dan x = 5? Turunan dari e^x adalah e^x, jadi e^x adalah antiturunan dari e^x, dan dengan demikian

$$\int_3^5 e^x\,dx = \left[e^x\right]_3^5$$
$$= e^5 - e^3$$
$$\approx 148.4 - 20.1$$
$$\approx 128.3$$

Apa yang bisa lebih sederhana? Dan jika satu jalan pintas besar tidak cukup untuk membuat hari Anda menyenangkan, Tabel 9-1 mencantumkan beberapa aturan tentang integral tertentu yang dapat membuat hidup Anda lebih mudah.

Tabel 9-1 Lima Aturan Mudah untuk Integral Pasti

1)	$\int_a^a f(x)dx = 0$	(Well, duh, there's no "area" between *a* and *a*)
2)	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$	
3)	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	
4)	$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	(*k* is a constant; you can pull a constant out of the integral
5)	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$	

9.4 ANTITURUNAN: TEKNIK DASAR

Bagian ini memberikan beberapa teknik dasar untuk antiturunan.

Aturan terbalik

Antiturunan termudah adalah yang kebalikan dari aturan turunan yang sudah Anda ketahui. Ini otomatis, antiturunan satu langkah dengan pengecualian aturan pangkat terbalik, yang hanya sedikit lebih sulit.

Aturan terbalik tanpa otak

Anda tahu bahwa turunan dari sin x adalah cos x, jadi pembalikannya memberi tahu Anda bahwa antiturunan dari cos x adalah sin x. Apa yang bisa lebih sederhana? Tetapi jangan lupa bahwa semua fungsi dalam bentuk sin x + C adalah antiturunan dari cos x. Dalam simbol, Anda menulis

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \text{ and therefore}$$
$$\int \cos x = \sin x + C$$

Tabel 9-2 mencantumkan aturan kebalikan untuk antiturunan.

1)	$\int 1dx$ (or just $\int dx$) $= x + C$ (because the derivative of x is 1)		
2)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; (n \neq -1)$	3)	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$
4)	$\int e^x dx = e^x + C$	5)	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$
6)	$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$	7)	$\int \cos x \; dx = \sin x + C$
8)	$\int \sec^2 x \; dx = \tan x + C$	9)	$\int \csc^2 x \; dx = -\cot x + C$
10)	$\int \sec x \tan x \; dx = \sec x + C$	11)	$\int \csc x \cot x \; dx = -\csc x + C$
12)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	13)	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
14)	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{\lvert x \rvert}{a} + C$		

Aturan kekuatan terbalik yang sedikit lebih sulit

Dengan aturan kekuatan, Anda tahu itu

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2, \text{ and therefore}$$
$$\int 3x^2 \, dx = x^3 + C$$

Inilah metode sederhana untuk membalikkan aturan daya. Gunakan untuk fungsi $5x^4$ Anda. Ingatlah bahwa aturan kekuatan mengatakan untuk

1. **Bawa kekuatan di depan di mana ia akan mengalikan sisa turunannya.**

   $5x^4 \to 4 \cdot 5x^4$

2. **Kurangi daya satu per satu dan sederhanakan.**

   $4 \cdot 5x^4 \to 4 \cdot 5x^3 = 20x^3$

Untuk membalikkan proses ini, balikkan urutan kedua langkah dan balikkan matematika dalam setiap langkah. Berikut cara kerjanya:

1. **Tingkatkan kekuatan satu per satu.**

   3 menjadi 4.

   $20x^3 \to 20x^4$

2. **Bagi dengan kekuatan baru dan sederhanakan.**

   $20x^4 \to \frac{20}{4} x^4 = 5x^4$

Dan dengan demikian Anda menulis.

$\int 20x^3 \, dx = 5x^4 + C.$

Terutama jika Anda baru mengenal antidiferensiasi, ada baiknya Anda menguji antiturunan Anda dengan membedakannya — Anda dapat mengabaikan C. Jika Anda kembali ke fungsi semula, Anda tahu antiturunan Anda benar.

Dengan antiturunan yang baru saja Anda temukan dan Teorema Dasar versi kedua, Anda dapat menentukan luas di bawah antara $20x^3$, katakanlah, 1 dan 2:

$$\int 20x^3\,dx = 5x^4 + C, \text{ thus}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 20x^3\,dx &= \left[5x^4\right]_1^2 \\ &= 5\cdot 2^4 - 5\cdot 1^4 \\ &= 80-5 \\ &= 75\end{aligned}$$

9.5 TEBAK DAN PERIKSA

Metode tebak-dan-periksa bekerja ketika integran (itu adalah ekspresi setelah simbol integral tidak menghitung dx, dan itu adalah hal yang ingin Anda antidiferensiasi) dekat dengan fungsi yang Anda tahu aturan kebalikannya. Sebagai contoh, mengatakan Anda ingin antiturunan dari cos(2*x*). Nah, Anda tahu bahwa turunan dari sinus adalah cosinus. Pembalikan yang memberitahu Anda bahwa antiturunan dari kosinus adalah sinus. Jadi, Anda mungkin berpikir bahwa antiturunan dari cos(2*x*) adalah sin(2*x*) . Itu tebakanmu. Sekarang periksa dengan membedakannya untuk melihat apakah Anda mendapatkan fungsi aslinya, cos(2*x*) :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\sin(2x) \\ &= \cos(2x)\cdot 2 \text{ (sine rule and chain rule)} \\ &= 2\cos(2x)\end{aligned}$$

Hasil ini sangat mendekati fungsi aslinya, kecuali untuk koefisien tambahan 2. Dengan kata lain, jawabannya adalah 2 kali lipat dari yang Anda inginkan. Karena Anda menginginkan setengah dari hasil itu, cobalah antiturunan yang merupakan setengah dari tebakan pertama Anda: $\frac{1}{2}\sin\,(2x)$. Periksa tebakan kedua ini dengan membedakannya, dan Anda mendapatkan hasil yang diinginkan.

Ini contoh lain. Apa antiturunan dari $(3x-2)^4$?

1. **Tebak antiturunannya.**

   Ini terlihat seperti masalah aturan kekuatan, jadi cobalah aturan kekuatan terbalik. Antiturunan dari x^4 adalah $\frac{1}{5}x^5$ dengan aturan kekuatan terbalik, jadi tebakan Anda adalah $\frac{1}{5}(3x-2)^5$.

2. **Periksa tebakan Anda dengan membedakannya.**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}(3x-2)^5\right]$$
$$=5\cdot\frac{1}{5}(3x-2)^4\cdot 3 \text{ (power rule and chain rule)}$$
$$=3(3x-2)^4$$

3. **Tweak tebakan pertama Anda.**
   Hasil Anda, $3(3x-2)^4$, adalah tiga kali terlalu banyak, jadi buatlah tebakan kedua Anda sepertiga dari tebakan pertama Anda — yaitu $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x-2)^5$, atau $\frac{1}{15}(3x-2)^5$.

4. **Periksa tebakan kedua Anda dengan membedakannya.**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{15}(3x-2)^5\right]$$
$$=5\cdot\frac{1}{15}(3x-2)^4\cdot 3 \text{ (power rule and chain rule)}$$
$$=(3x-2)^4$$

Ini memeriksa. Kamu sudah selesai. Antiturunan dari $(3x-2)^4$ adalah $\frac{1}{15}(3x-2)^5+C$.

Dua contoh sebelumnya menunjukkan bahwa tebak dan periksa berfungsi dengan baik ketika fungsi yang ingin Anda antidiferensiasi memiliki argumen seperti 3x atau 3x + 2 (di mana x dipangkatkan pertama) alih-alih x lama biasa. (Ingat bahwa dalam fungsi seperti $\sqrt{5x}$, 5x disebut argumen.) Dalam kasus ini, Anda cukup mengubah tebakan Anda dengan kebalikan dari koefisien x — 3 dalam 3x + 2, misalnya (2 dalam 3x + 2 tidak berpengaruh pada jawaban Anda). Padahal, untuk soal-soal yang mudah ini, Anda tidak perlu menebak-nebak dan mengeceknya. Anda dapat langsung melihat cara mengubah tebakan Anda. Ini menjadi semacam proses satu langkah. Jika argumen fungsi lebih rumit dari 3x + 2 — seperti x^2in cos (x^2)— Anda harus mencoba metode selanjutnya, substitusi.

9.6 PENGGANTI

Di bagian sebelumnya, Anda dapat melihat mengapa tebakan pertama dalam setiap kasus tidak berhasil. Saat Anda membedakan tebakan, aturan rantai menghasilkan konstanta ekstra: 2 pada contoh pertama, 3 pada contoh kedua. Anda kemudian mengubah tebakan dengan 1/2 dan 1/3 untuk mengimbangi konstanta ekstra.

Sekarang katakanlah Anda menginginkan antiturunan dari cos (x^2) dan Anda menebak bahwa itu adalah sin (x^2). Perhatikan apa yang terjadi ketika Anda membedakan sin (x^2) untuk memeriksanya.

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\sin\left(x^2\right)\\&=\cos\left(x^2\right)\cdot 2x \ \ (\text{sine rule and chain rule})\\&=2x\cos\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Di sini aturan rantai menghasilkan tambahan 2x — karena turunan dari dengan melampirkan x^2 adalah 2x — tetapi jika Anda mencoba mengimbanginya dengan tebakan Anda $\frac{1}{2x}$, itu tidak akan berhasil. Cobalah.

Jadi, menebak dan memeriksa tidak berfungsi untuk antidiferensiasi cos (x^2) — sebenarnya tidak ada metode yang bekerja untuk integran yang tampak sederhana ini (tidak semua fungsi memiliki antiturunan) — tetapi upaya Anda untuk diferensiasi di sini mengungkapkan kelas fungsi baru yang dapat Anda antidiferensiasikan. Karena turunan dari sin (x^2) adalah 2xcos (x^2), antiturunan dari harus 2xcos (x^2). Fungsi ini, sin (x^2), adalah jenis fungsi 2xcos (x^2). yang Anda antidiferensiasikan dengan metode substitusi.

Metode substitusi bekerja ketika integran berisi fungsi dan turunan dari argumen fungsi — dengan kata lain, ketika mengandung hal tambahan yang dihasilkan oleh aturan rantai — atau sesuatu yang serupa kecuali untuk konstanta. Dan integrand tidak boleh mengandung hal lain.

Turunan dari e^{x^3} adalah $e^{x^3} \cdot 3x^2$ dengan aturan e^x dan aturan rantai. Jadi, antiturunan dari $e^{x^3} \cdot 3x^2$ adalah e^{x^3}. Dan jika Anda diminta untuk mencari antiturunan dari $e^{x^3} \cdot 3x^2$, Anda akan tahu bahwa metode substitusi akan berhasil karena ekspresi ini mengandung $3x^2$, yang merupakan turunan dari argumen e^{x^3}, yaitu x^3.

Anda mungkin bertanya-tanya mengapa ini disebut metode substitusi. Saya tunjukkan mengapa dalam satu menit. Tetapi pertama-tama, saya ingin menunjukkan bahwa Anda tidak selalu harus menggunakan metode langkah demi langkah. Dengan asumsi Anda memahami mengapa antiturunan dari $e^{x^3} \cdot 3x^2$, adalah e^{x^3},, Anda mungkin mengalami masalah di mana Anda hanya dapat melihat antiturunan tanpa melakukan pekerjaan apa pun. Tetapi apakah Anda hanya dapat melihat jawaban untuk masalah seperti ini atau tidak, metode substitusi adalah cara yang baik untuk dipelajari karena, untuk satu hal, ini memiliki banyak kegunaan dalam kalkulus dan bidang matematika lainnya, dan untuk hal lain, guru Anda mungkin mengharuskan Anda mengetahuinya dan menggunakannya. Jadi, inilah cara menemukan antiturunan dari $\int 2x\cos\,(x^2)dx$ dengan substitusi.

1. **Tetapkan u sama dengan argumen fungsi utama.**
   Argumen dari $\cos\,(x^2)$ adalah x^2, jadi Anda menyetel u sama dengan x^2.
2. **Ambil turunan dari u terhadap x.**

$$u = x^2 \text{ so } \frac{du}{dx} = 2x$$

3. **Selesaikan untuk dx.**

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{1}$$
$$du = 2xdx \text{ (cross multiplication)}$$
$$\frac{du}{2x} = dx \text{ (dividing both sides by } 2x\text{)}$$

4. **Lakukan substitusi.**
   Dalam $\int 2x\cos(x^2)dx$, u menggantikan x^2 dan $\frac{du}{2x}$ menggantikan *dx*. Jadi sekarang Anda punya $\int 2x\cos u\frac{du}{2x}$. Dua 2xs membatalkan, memberi Anda $\int \cos udu$.

5. **Antidiferensiasi menggunakan aturan kebalikan sederhana.**

$$\int \cos udu = \sin u + C$$

6. **Pengganti kembali untuk u — datang lingkaran penuh.**
   u sama x^2, jadi x^2 masuk untuk u:

$$\int \cos udu = \sin(x^2) + C$$

Itu dia. Jadi .

$$\int 2x\cos(x^2)dx = \sin(x^2) + C.$$

Jika masalah aslinya $\int 5x\cos(x^2)dx$ bukan $\int 2x\cos(x^2)dx$, Anda mengikuti langkah yang sama kecuali pada Langkah 4, setelah melakukan substitusi, Anda sampai pada $\int 5x\cos u\frac{du}{2x}$. Xs masih membatalkan — itu yang penting — tetapi setelah membatalkan Anda mendapatkan $\int \frac{5}{2}\cos udu$, yang memiliki ekstra $\frac{5}{2}$ di dalamnya. Tidak kekhawatiran. Tarik saja $\frac{5}{2}$ melalui $\int$ pemberian Anda $\int \frac{5}{2}\cos udu$. Sekarang Anda menyelesaikan masalah ini seperti yang Anda lakukan di atas pada Langkah 5 dan 6, kecuali file $\frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}\int \cos udu &= \frac{5}{2}(\sin u + C)\\ &= \frac{5}{2}\sin u + \frac{5}{2}C\\ &= \frac{5}{2}\sin(x^2) + \frac{5}{2}C\end{aligned}$$

Karena C adalah konstanta lama apa pun, $\frac{5}{2}C$ tetap konstanta lama apa pun, jadi Anda dapat menyingkirkan $\frac{5}{2}$ bagian depan C. Itu mungkin tampak agak tidak matematis, tetapi itu benar. Jadi, finalmu jawabannya adalah $\frac{5}{2}\sin(x^2) + C$. Anda harus memeriksa ini dengan membedakannya.

Berikut adalah beberapa contoh antiturunan yang dapat Anda lakukan dengan metode substitusi sehingga Anda dapat mempelajari cara mengenalinya.

$$\int 4x^2 \cos\left(x^3\right) dx$$

Turunan dari x^3 adalah $3x^2$, tetapi Anda tidak perlu memperhatikan 3 in $3x^2$ atau 4 di integral. Karena integran berisi x^2, dan karena tidak mengandung barang tambahan lainnya, substitusi berfungsi. Cobalah.

$$\int 10\sec^2 x \cdot e^{\tan x}\, dx$$

Integran berisi fungsi, $e^{\tan x}$, serta turunan dari argumennya, tan x — yaitu $sec^2 x$. Karena integrand tidak mengandung tambahan lainnya hal-hal (kecuali untuk 10, yang tidak masalah), substitusi berfungsi. Lakukan.

$$\int \frac{2}{3}\cos x\sqrt{\sin x}\ \ dx$$

Karena integran mengandung turunan sin x, yaitu cos x, dan tidak ada barang lain kecuali 2/3, substitusi bekerja. Pergi untuk itu.

Anda dapat mengerjakan tiga soal yang baru saja disebutkan dengan metode yang menggabungkan substitusi dan menebak dan memeriksa (selama guru Anda tidak memaksa Anda untuk menunjukkan solusi substitusi enam langkah). Coba gunakan metode kombo ini untuk antidiferensiasi contoh pertama, $\int 5x^2\cos\,(x^3)dx$. Konfirmasikan terlebih dahulu bahwa integral cocok dengan pola substitusi — memang demikian, seperti yang terlihat pada item daftar periksa pertama. Konfirmasi ini adalah satu-satunya bagian yang dimainkan substitusi dalam metode kombo. Sekarang selesaikan masalah dengan menebak dan memeriksa.

1. **Buat tebakan Anda.**
   Antiturunan dari kosinus adalah sinus, jadi tebakan yang baik untuk antiturunan dari $4x^2\cos\,(x^3)$ adalah sin (x^3).
2. **Periksa tebakan Anda dengan membedakannya.**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin\left(x^3\right) &= \cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2 \ \ \text{(sine rule and chain rule)}\\ &= 3x^2\cos\left(x^3\right)\end{aligned}$$

3. **Tweak tebakan Anda.**

Hasil Anda dari Langkah 2, $3x^2\cos(x^3)$, adalah 3/4 dari yang Anda inginkan, $4x^2\cos(x^3)$, jadi buat tebakan Anda 4/3 lebih besar (perhatikan bahwa 4/3 adalah kebalikan dari 3/4). Tebakan kedua Anda adalah dengan demikian $\frac{4}{3}\sin(x^3)$.

4. **Periksa tebakan kedua ini dengan membedakannya.**

   Oh, sial, lewati ini — jawaban Anda harus berhasil.

BAB 10
INTEGRASI UNTUK PAKAR

Dalam Bab Ini

- Memecah integral menjadi beberapa bagian
- Menemukan integral trigonometri
- Memahami As, Bs, dan Cxs dari pecahan parsial

Saya kira tidak ada salahnya untuk memberi Anda jeda dari jenis hal-hal dasar teoretis yang saya bahas cukup tebal di Bab 9, jadi bab ini memotong ke pengejaran dan menunjukkan kepada Anda hanya mur dan baut dari beberapa teknik integrasi.

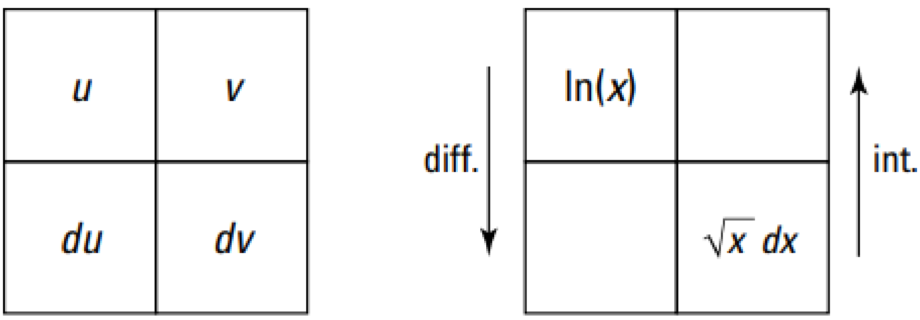
10.1 INTEGRASI BERDASARKAN BAGIAN

Ide dasar integrasi per bagian adalah untuk mengubah integral yang tidak dapat Anda lakukan menjadi produk sederhana dikurangi integral yang dapat Anda lakukan. Berikut rumusnya:

Integrasi berdasarkan Bagian: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Dan inilah metode singkatnya. Apa $\int \sqrt{x}$ In(x)? Pertama, Anda harus membagi integran menjadi u dan dv sehingga cocok dengan rumus. Untuk masalah ini, pilihlah $In(x)$ menjadi u Anda. Kemudian yang lainnya adalah dv, yaitu $\sqrt{x}\ dx$. (Saya tunjukkan cara memilih Anda di bagian berikutnya.) Selanjutnya, Anda membedakan Anda untuk mendapatkan du Anda, dan Anda mengintegrasikan dv untuk mendapatkan v Anda. Akhirnya, Anda memasukkan semuanya ke dalam rumus dan Anda bebas di rumah.

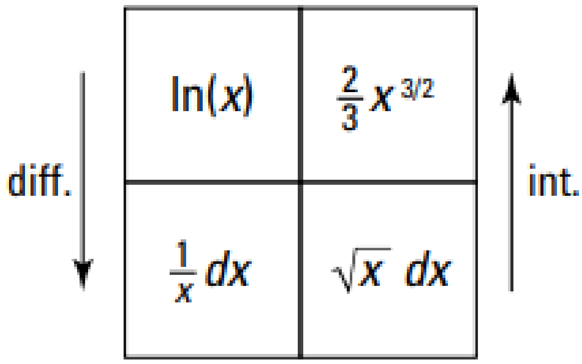
Untuk membantu menjaga semuanya tetap lurus, atur masalah integrasi per bagian dengan kotak seperti yang ada di sebelah kiri pada Gambar 10-1. Untuk setiap masalah baru, gambar kotak kosong 2-kali-2, lalu letakkan u Anda di sudut kiri atas dan dv Anda di sudut kanan bawah. Kotak untuk masalah di atas ada di sebelah kanan pada Gambar 10-1.



Gambar 10-1: Kotak integrasi per bagian.

Panah pada Gambar 10-1 mengingatkan Anda untuk membedakan di sebelah kiri dan berintegrasi di sebelah kanan. Sekarang lakukan kalkulus dan lengkapi kotak seperti yang ditunjukkan pada Gambar 10-2:

$$u = \ln(x) \qquad dv = \sqrt{x}\ dx$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \int dv = \int \sqrt{x}\ dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{2}{3}x^{3/2}$$



Gambar 10-2: Kotak lengkap untuk

Siap untuk menyelesaikan? Masukkan semuanya ke dalam rumus:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int \sqrt{x}\ln(x)dx = \ln(x)\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} - \int \frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right) \quad \text{(reverse power rule)}$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} - \frac{2}{3}C$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2} - C$$

Pada langkah terakhir, Anda mengganti $-\frac{2}{3}C$ dengan C karena $-\frac{2}{3}$kali nomor lama tetap saja nomor lama.

10.2 MEMILIH U

Inilah mnemonik yang bagus untuk cara memilih u (sekali lagi, setelah Anda memilih u, yang lainnya adalah dv).

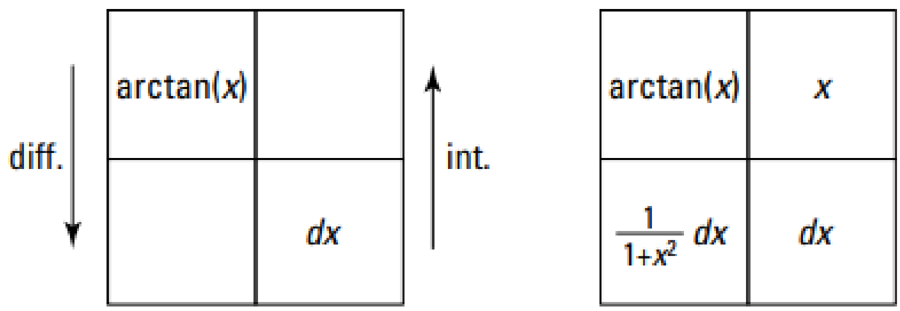
Herbert E. Kasube datang dengan akronim LIATE untuk membantu Anda memilih u Anda (kutu buku kalkulus dapat melihat artikel Herb di American Mathematical Monthly 90, edisi 1983):

L Logaritma	(seperti log(x))
I Trigonometri terbalik	(seperti arctan(x))
Sebuah Aljabar	(seperti $5x^2 + 3$)
T Trigonometri	(seperti cos(x))
E Eksponensial	(seperti 10^x)

Untuk memilih u Anda, lihat daftar ini; jenis fungsi pertama yang muncul di integran adalah u. Contoh: Integrasikan $\int \arctan(x)dx$. (Integrasi berdasarkan bagian terkadang berfungsi untuk integrasi seperti ini yang hanya berisi satu fungsi.)

1. **Turun daftar LIATE dan pilih u.**

   Anda melihat bahwa tidak ada fungsi logaritma di $\arctan(x)dx$, tetapi ada fungsi trigonometri terbalik, $\arctan(x)$. Jadi itu kamu. Segala sesuatu yang lain adalah dv Anda, yaitu, dx tua biasa.
2. **Lakukan hal kotak**. Lihat Gambar 10-3.



Gambar 10-3: Benda kotak.

3. **Masukkan semuanya ke dalam rumus integrasi demi bagian.**

$$\int udv = uv - \int vdu$$

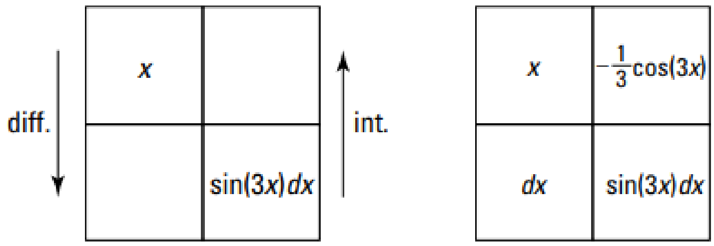
$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\ dx$$

Sekarang Anda dapat menyelesaikan masalah ini dengan mengintegrasikan $\int x \frac{1}{1+x^2} dx$ dengan metode substitusi, pengaturan $u = 1 + x^2$. Cobalah. Perhatikan bahwa u in $u = 1 + x^2$ tidak ada hubungannya dengan integrasi demi bagian u. Jawaban akhir Anda Seharusnya $\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$.

Ini satu lagi. Mengintegrasikan $\int x\sin(3x)dx.$.

1. **Turun daftar LIATE dan pilih u.**

   Turun ke daftar LIATE, jenis fungsi pertama yang Anda temukan $xsin(3x)dx$ adalah fungsi aljabar yang sangat sederhana, yaitu x, jadi itu adalah u Anda.
2. **Lakukan hal kotak.** Lihat Gambar 10-4.



Gambar 10-4: Masih banyak kotak.

3. **Masukkan semuanya ke dalam rumus integrasi demi bagian.**

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x\sin(3x)dx = -\frac{1}{3}x\cos(3x) - \int -\frac{1}{3}\cos(3x)dx$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)dx$$

Anda dapat dengan mudah berintegrasi $\int \cos(3x)\,dx$ dengan substitusi atau metode tebak-dan-periksa. Jawaban akhir Anda seharusnya . $-\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x) + C$

10.3 INTEGRAL TRIGONOMETRI RUMIT

Di bagian ini, Anda mengintegrasikan kekuatan dari enam fungsi trigonometri, seperti $\int sin^3(3x)\,dx$ dan $\int sec^4(3x)\,dx$, dan produk atau hasil bagi dari fungsi trigonometri, seperti $\int sin^2(x)\ cos^3\ (x)\,dx$ dan $\int \frac{csc^2(x)}{\cot(x)}\ dx$. Ini agak membosankan — waktu untuk minum kafein.

Untuk menggunakan teknik berikut, Anda harus memiliki integran yang hanya berisi satu dari enam fungsi trigonometri seperti $\int csc^3(x)\,dx$ atau pasangan fungsi trigonometri tertentu, seperti $\int sin^2(x)\cos\,(x)\,dx$. Jika integran memiliki dua fungsi trigonometri, keduanya harus merupakan salah satu dari tiga pasangan berikut: sinus dengan kosinus, sekan dengan tangen, atau cosekan dengan cotangen. Untuk integran yang mengandung sesuatu selain salah satu dari pasangan ini, Anda dapat mengubah masalah menjadi salah satu pasangan ini dengan menggunakan identitas trigonometri seperti $\sin(x) = 1/\csc\,(x)$ dan $\tan(x) = \sin\,(x)/\cos\,(x)$. Contohnya,

$$\int \sin^2(x)\sec(x)\tan(x)dx$$

$$= \int \sin^2(x)\frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx$$

$$= \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}\ dx$$

Setelah konversi yang diperlukan, Anda mendapatkan salah satu dari tiga kasus:

$$\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx$$
$$\int \sec^m(x)\tan^n(x)dx$$
$$\int \csc^m(x)\cot^n(x)dx$$

di mana m atau n adalah bilangan bulat positif.

Kekuatan positif dari fungsi trigonometri umumnya lebih disukai daripada kekuatan negatif, jadi, misalnya, Anda ingin mengonversi $\int sin^{-2}(x)\ tan^{-2}\ (x)\, dx$ ke dalam $\int csc^2(x)\ cot^2\ (x)\, dx$.

Sinus dan Cosinus

Bagian ini mencakup integral yang mengandung sinus dan cosinus.

Kasus 1: Kekuatan sinus ganjil dan positif

Jika pangkat sinus ganjil dan positif, potong satu faktor sinus dan letakkan di sebelah kanan sisa ekspresi, ubah faktor sinus yang tersisa menjadi cosinus dengan identitas Pythagoras, dan kemudian integrasikan dengan metode substitusi di mana $u = \cos\ (x)$.

Identitas Pythagoras memberitahu Anda bahwa, untuk setiap sudut x, $sin^2(x)\ cos^2\ (x) = 1$. Dan dengan demikian $sin^2(x) = 1 - \ cos^2\ (x)$ dan $cos^2(x) = 1 - \ sin^2\ (x)$

.Sekarang integrasikan $\int sin^3(x)\ cos^4\ (x)\, dx$.

1. **Potong satu faktor sinus dan pindahkan ke kanan.**

$$\int \sin^3(x)\cos^4(x)dx = \int \sin^2(x)\cos^4(x)\sin(x)dx$$

2. **Ubah sinus yang tersisa menjadi cosinus menggunakan identitas Pythagoras dan sederhanakan.**

$$\begin{aligned} &\int \sin^2(x)\cos^4(x)\sin(x)dx \\ &= \int \left(1-\cos^2(x)\right)\cos^4(x)\sin(x)dx \\ &= \int \left(\cos^4(x)-\cos^6(x)\right)\sin(x)dx \end{aligned}$$

3. **Integrasikan dengan substitusi, dimana $\boldsymbol{u = cos(x)}$.**

$$\begin{aligned} u &= \cos(x) \\ \frac{du}{dx} &= -\sin(x) \\ du &= -\sin(x)dx \end{aligned}$$

Anda dapat menghemat sedikit waktu dalam semua masalah substitusi hanya dengan menyelesaikan du — seperti yang saya lakukan tepat di atas — dan tidak repot-repot

menyelesaikan untuk dx. Anda kemudian men-tweak integral sehingga mengandung hal yang sama dengan $(-\sin(x)\,dx)$ dalam masalah ini. Integral berisi $\sin(x)\,dx$, jadi Anda mengalikannya dengan untuk mengubahnya menjadi $-\sin(x)\,dx$ dan kemudian mengkompensasinya dengan mengalikan seluruh integral dengan . Ini mencuci karena -1 waktu -1 sama dengan 1. Ini mungkin tidak terdengar seperti jalan pintas, tetapi ini adalah penghemat waktu yang baik setelah Anda terbiasa.
Jadi tweak integral Anda:

$$\begin{aligned}&\int\left(\cos^4(x)-\cos^6(x)\right)\left(\sin(x)dx\right)\\ =-&\int\left(\cos^4(x)-\cos^6(x)\right)\left(-\sin(x)dx\right)\end{aligned}$$

Sekarang substitusikan dan selesaikan dengan aturan pangkat terbalik:

$$\begin{aligned}&=-\int\left(u^4-u^6\right)du\\ &=-\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7+C\\ &=\frac{1}{7}\cos^7(x)-\frac{1}{5}\cos^5(x)+C\end{aligned}$$

Kasus 2: Kekuatan kosinus ganjil dan positif

Masalah ini bekerja persis seperti Kasus 1, kecuali bahwa peran sinus dan kosinus dibalik. Menemukan $\int\frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$.

1. **Potong salah satu faktor kosinus dan pindahkan ke kanan.**

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx &= \int\cos^3(x)\left(\sin^{-1/2}(x)\right)dx\\ &=\int\cos^2(x)\left(\sin^{-1/2}(x)\right)\cos(x)dx\end{aligned}$$

2. **Ubah sisa cosinus menjadi sinus dengan identitas Pythagoras dan sederhanakan.**

$$\begin{aligned}&=\int\left(1-\sin^2(x)\right)\left(\sin^{-1/2}(x)\right)\cos(x)dx\\ &=\int\left(\sin^{-1/2}(x)-\sin^{3/2}(x)\right)\cos(x)dx\end{aligned}$$

3. **Integrasikan dengan substitusi, dimana $u = sin(x)$.**

$$u = \sin(x)$$
$$\frac{du}{dx} = \cos(x)$$
$$du = \cos(x)dx$$

Sekarang gantikan:

$$\int\left(u^{-1/2} - u^{3/2}\right) du$$

Dan selesaikan pengintegrasian seperti pada Kasus 1.

Kasus 3: Kekuatan sinus dan kosinus genap dan nonnegatif

Di sini Anda mengubah integran menjadi pangkat ganjil cosinus dengan menggunakan identitas trigonometri berikut:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{and} \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Kemudian Anda menyelesaikan masalah seperti pada Kasus 2. Berikut ini contohnya:

$$\begin{aligned}
&\int \sin^4(x)\cos^2(x)dx \\
&= \int\left(\sin^2(x)\right)^2 \cos^2(x)dx \\
&= \int\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\int\left(1-\cos(2x)-\cos^2(2x)+\cos^3(2x)\right) dx \quad \text{(It's just algebra!)} \\
&= \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}\int\cos(2x)dx - \frac{1}{8}\int\cos^2(2x)dx + \frac{1}{8}\int\cos^3(2x)dx
\end{aligned}$$

Yang pertama dalam rangkaian integral ini adalah no-brainer; yang kedua adalah aturan terbalik sederhana dengan sedikit tweak untuk 2; Anda melakukan integral ketiga dengan menggunakan identitas $cos^2(x)$ untuk kedua kalinya; dan integral keempat ditangani dengan mengikuti langkah-langkah dalam Kasus 2. Lakukan. Jawaban akhir Anda seharusnya

$$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) - \frac{1}{48}\sin^3(2x) + C$$

Sekan dan tangen

Bagian ini mencakup integral — apakah Anda duduk? — mengandung sekan dan tangen!

Kasus 1: Kekuatan tangen ganjil dan positif

Mengintegrasikan $\int\sqrt{\sec(x)}\tan^3(x)dx.$

1. **Potong faktor tangen dan pindahkan ke kanan.**
   Pertama, tulis ulang masalahnya:

$$\int \sqrt{\sec(x)}\tan^3(x)dx = \int \sec^{1/2}(x)\tan^3(x)dx.$$

   Mengambil faktor sekan-tangen dari $sec^{1/2}(x)tan^3(x)$ mungkin tampak seperti memeras darah dari lobak karena $sec^{1/2}(x)$ memiliki kekuatan kurang dari $sec^1(x)$, tetapi berhasil:

$$\int \sec^{1/2}(x)\tan^3(x)dx = \int \left(\sec^{-1/2}(x)\tan^2(x)\right)\sec(x)\tan(x)dx$$

2. **Ubah tangen yang tersisa menjadi sekan dengan versi tangen dari identitas Pythagoras.**
   Identitas Pythagoras adalah $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$, dan dengan demikian $tan^2(x) = sec^2(x) - 1$. Sekarang lakukan peralihan.

$$\begin{aligned} &\int \left(\sec^{-1/2}(x)\tan^2(x)\right)\sec(x)\tan(x)dx \\ &= \int \left(\sec^{-1/2}(x)\left(\sec^2(x)-1\right)\right)\sec(x)\tan(x)dx \\ &= \int \left(\sec^{3/2}(x)-\sec^{-1/2}(x)\right)\sec(x)\tan(x)dx \end{aligned}$$

3. **Selesaikan dengan substitusi dengan $u = sec(x)$ dan $du = sec(x)tan(x)dx$.**

$$\begin{aligned} &= \int \left(u^{3/2} - u^{-1/2}\right) du \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2} - 2u^{1/2} + C \\ &= \frac{2}{5}\sec^{5/2}(x) - 2\sec^{1/2}(x) + C \end{aligned}$$

.

Kasus 2: Kekuatan sekan adalah genap dan positif

Menemukan $\int \sec^4(x)\tan^4(x)dx$.

1. **Potong faktor dan pindahkan ke kanan.**

$$= \int \sec^2(x)\tan^4(x)\sec^2(x)dx$$

2. **Ubah sekan yang tersisa menjadi tangen dengan identitas Pythagoras, $sec^2(x) = tan^2(x) + 1$.**

$$= \int \left(\tan^2(x)+1\right)\tan^4(x)\sec^2(x)dx$$
$$= \int \left(\tan^6(x)+\tan^4(x)\right)\sec^2(x)dx$$

3. **Selesaikan dengan substitusi, di mana $u = tan(x)$ dan $du = sec^2(x)dx$**

.

$$= \int \left(u^6 + u^4\right)du$$
$$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{7}\tan^7(x) + \frac{1}{5}\tan^5(x) + C$$

Kasus 3: Kekuatan tangen genap dan positif dan tidak ada faktor sekan

Mengintegrasikan. $\int \tan^6(x)dx.$

1. **Ubah $tan^2(x)$ satu faktor menjadi secan menggunakan identitas Pythagoras, $tan^2(x) = sec^2(x) - 1$.**

$$= \int \tan^4(x)\left(\sec^2(x)-1\right)dx$$

2. **Bagi dan bagi integral tersebut.**

$$= \int \tan^4(x)\sec^2(x)dx - \int \tan^4(x)dx$$

3. **Selesaikan integral pertama seperti pada Langkah 3 dari Kasus 2 untuk sekan dan tangen.**

   Anda harus mendapatkan $\int \tan^4(x)\sec^2(x)dx = \frac{1}{5}\tan^5(x) + C.$.

4. **Untuk integral kedua dari Langkah 2, kembali ke Langkah 1 dan ulangi prosesnya.** Untuk bagian dari masalah ini, Anda mendapatkan

$$-\int \tan^4(x)dx = -\int \tan^2(x)\sec^2(x)dx + \int \tan^2(x)dx.$$

.

5. **Ulangi Langkah 3 untuk $\int tan^2(x)sec^2(x)dx$ (menggunakan Kasus 2, Langkah 3) untuk sekan dan tangen lagi).**

$$-\int \tan^2(x)\sec^2(x)dx = -\frac{1}{3}\tan^3(x) + C$$

6. **Gunakan identitas Pythagoras untuk mengubah $\int tan^2(x)dx$ dari Langkah 4 ke $\int sec^2(x)dx - \int 1dx.$**

Kedua integral ini dapat dilakukan dengan aturan diferensiasi terbalik sederhana. Setelah mengumpulkan semua potongan ini — potongan 1 dari Langkah 3, potongan 2 dari Langkah 5, dan potongan 3 dan 4 dari Langkah 6 — jawaban akhir Anda seharusnya menjadi $\int \tan^6(x)dx = \frac{1}{5}\tan^5(x) - \frac{1}{3}\tan^3(x) + \tan(x) - x + C.$.

Cosekan dan Cotangen

Integral cosekan dan cotangen bekerja persis seperti tiga kasus untuk sekan dan tangen — Anda hanya menggunakan bentuk yang berbeda dari identitas Pythagoras: $1 + cot^2(x) = csc^2(x)$. Coba yang ini: Mengintegrasikan $\int \frac{\cot^3(x)}{\sqrt{\csc(x)}}dx$. Jika Anda mendapatkan$-2sin^{1/2}(x) - \frac{2}{3}csc^{3/2}(x) + C$, berikan "Pergi" dan kumpulkan Rp 3.000.000.

Jika Anda mendapatkan masalah tangen-tangen atau cosekan-cotangen yang tidak sesuai dengan kasus yang dibahas di bagian sebelumnya atau jika Anda mengalami masalah, coba ubah ke sinus dan kosinus dan selesaikan dengan satu dari metode sinus-cosinus atau dengan identitas seperti $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ dan $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

10.4 SUBSTITUSI TRIGONOMETRI

Dengan metode substitusi trigonometri, Anda dapat melakukan integral yang mengandung radikal dengan bentuk berikut: $\sqrt{u^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 - u^2}$, dan $\sqrt{u^2 - a^2}$ (serta pangkat dari akar-akar tersebut), di mana a adalah konstanta dan u adalah ekspresi yang mengandung x. Misalnya $\sqrt{3^2 - x^2}$ berbentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Saya punya beberapa trik mnemonik konyol untuk membantu Anda menjaga ketiga kasus metode ini tetap lurus. (Ingat, dengan perangkat mnemonic, pekerjaan konyol.) Pertama, tiga kasus melibatkan tiga fungsi trigonometri, tangen, sinus, dan secan. Huruf awal mereka, t, s, dan s, adalah huruf yang sama dengan huruf awal dari nama teknik ini, substitusi trigonometri. Cukup bagus, ya?

Tabel 10-1 menunjukkan bagaimana ketiga fungsi trigonometri ini berpasangan dengan bentuk-bentuk radikal yang tercantum dalam paragraf pembuka.

Tabel 10-1 Tabel yang Benar-benar Radikal

$\tan(\theta)$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{u^2+a^2}$
$\sin(\theta)$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{a^2-u^2}$
$\sec(\theta)$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{u^2-a^2}$

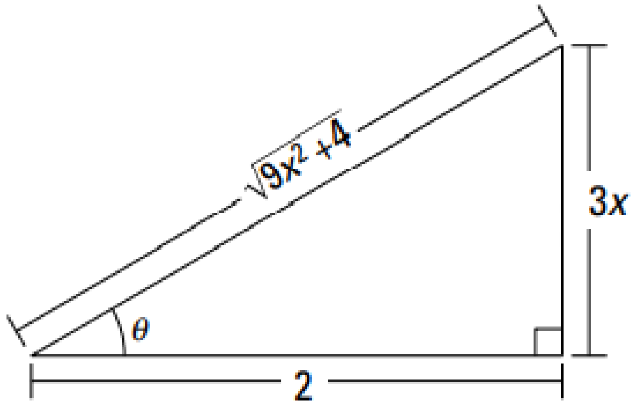
Untuk menjaga pasangan ini tetap lurus, perhatikan bahwa tanda tambah $\sqrt{u^2 - a^2}$ terlihat seperti t kecil untuk tangen, dan dua lainnya bentuk, $\sqrt{a^2 - u^2}$ dan $\sqrt{u^2 - a^2}$, mengandung tanda pengurangan — s adalah untuk sinus dan secan. Untuk mengingat apa pasangan sinus dan secant $\sqrt{a^2 - u^2}$, perhatikan yang dimulai dengan huruf a, dan menyebut seseorang sebagai keledai adalah dosa. Oke, saya akui ini cukup lemah. Jika anda bisa datang dengan mnemonic yang lebih baik, gunakan itu!

Kasus 1: Tangen

Menemukan $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$. Pertama, perhatikan bahwa ini dapat ditulis ulang sebagai $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x)^2+2^2}}$, sehingga sesuai dengan bentuk $\sqrt{u^2 - a^2}$, dimana u = 3x dan a = 2.

1. **Gambarlah segitiga siku-siku — pada dasarnya adalah segitiga SohCahToa — di mana $\boldsymbol{tan(\theta)}$ sama dengan $\frac{u}{a}$, yaitu $\frac{3x}{2}$.**

   Karena Anda tahu bahwa $(\boldsymbol{\theta}) = \frac{O}{A}$(dari SohCahToa), segitiga Anda seharusnya memiliki 3x sebagai O, sisi yang berhadapan dengan sudut $\boldsymbol{\theta}$, dan 2 sebagai A, sisi yang berdekatan. Kemudian, oleh Teorema Pythagoras, panjang sisi miring secara otomatis sama dengan radikal Anda,$\sqrt{(3x)^2 + 2^2}$, atau $\sqrt{9x^2 + 4}$. Lihat Gambar 10-5.



Gambar 10-5: Segitiga SohCahToa untuk kasus $\sqrt{u^2 - a^2}$

$$\frac{3x}{2} = \tan(\theta)$$
$$3x = 2\tan(\theta)$$
$$x = \frac{2}{3}\tan(\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{3}\sec^2(\theta)$$
$$dx = \frac{2}{3}\sec^2(\theta)d\theta$$

2. **Temukan fungsi trigonometri mana yang diwakili oleh radikal di atas a dan kemudian selesaikan akarnya.**

   Perhatikan segitiga pada Gambar 10-5. radikal adalah sisi miring dan a adalah 2, sisi yang berdekatan, jadi $\frac{\sqrt{9x^2+4}}{2}$ adalah $\frac{H}{A}$, yang sama dengan sekan. Jadi sec $(\theta)\frac{\sqrt{9x^2+4}}{2}$, dan dengan demikian $\sqrt{9x^2 + 4} = 2\sec(\theta)$

3. **Gunakan hasil dari Langkah 2 dan 3 untuk membuat substitusi dalam masalah asli, kemudian integrasikan.**

Dari Langkah 2 dan 3 Anda memiliki $dx = \frac{2}{3}2sec^2(\theta)d\theta$ dan $\sqrt{9x^2+4} = 2sec\ (\theta)$. Sekarang Anda akhirnya bisa melakukan integrasi.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}} = \int \frac{\frac{2}{3}\sec^2(\theta)d\theta}{2\sec(\theta)}$$
$$= \frac{1}{3}\int \sec(\theta)d\theta$$

4. **Substitusi ekspresi x dari Langkah 1 dan 3 kembali untuk $sec(\theta)$ dan $tan(\theta)$. Anda juga bisa mendapatkan ekspresi dari segitiga pada Gambar 10-5.**

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9x^2+4}}{2} + \frac{3x}{2}\right| + C$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9x^2+4}+3x}{2}\right| + C$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2+4}+3x\right| - \frac{1}{3}\ln 2 + C \quad \left(\begin{array}{l}\text{by the log of a quotient} \\ \text{rule and distributing the } \frac{1}{3}\end{array}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9x^2+4}}{2} + \frac{3x}{2}\right| + C \quad \left(\text{because } \frac{1}{3}\ln 2 + C \text{ is just a constant}\right)$$

Untuk ketiga kasus dalam substitusi trigonometri, Langkah 1 selalu melibatkan menggambar segitiga di mana fungsi trigonometri dalam pertanyaan sama dengan $\frac{u}{a}$:

$$\text{Case 1 is } \tan(\theta) = \frac{u}{a}$$
$$\text{Case 2 is } \sin(\theta) = \frac{u}{a}$$
$$\text{Case 3 is } \sec(\theta) = \frac{u}{a}$$

Untuk ketiga kasus, Langkah 3 selalu melibatkan penempatan radikal di atas a. Tiga kasus diberikan di bawah ini, tetapi Anda tidak perlu mengingat fungsi trigonometri dalam daftar ini karena Anda akan tahu yang mana yang Anda dapatkan hanya dengan melihat segitiga— dengan asumsi Anda mengetahui SohCahToa dan fungsi trigonometri timbal balik . Saya telah mengabaikan apa yang berada di bawah radikal karena pada saat Anda melakukan Langkah 3, Anda sudah mendapatkan ekspresi radikal yang tepat.

$$\text{Case 1 is } \sec(\theta) = \frac{\sqrt{\ }}{a}$$
$$\text{Case 2 is } \cos(\theta) = \frac{\sqrt{\ }}{a}$$
$$\text{Case 3 is } \tan(\theta) = \frac{\sqrt{\ }}{a}$$

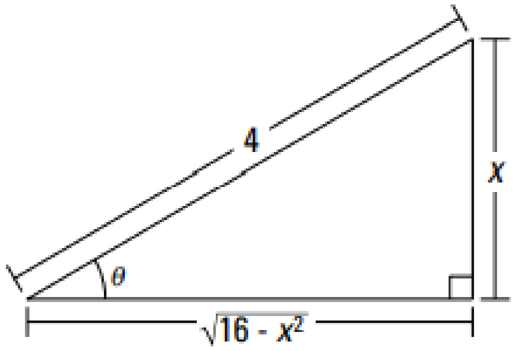
Ingat saja $\frac{u}{a}$ untuk Langkah 1 dan $\frac{\sqrt{}}{a}$ untuk Langkah 3.

Kasus 2: Sinus

Integralkan $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$, tulis ulang terlebih dahulu $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4^2-x^2}}$ sehingga sesuai dengan bentuk $\sqrt{a^2 - u^2}$, dimana a = 4 dan u = x.

1. **Gambarlah segitiga siku-siku di mana $(\theta) = \frac{u}{a}$, yaitu $\frac{x}{4}$.**

   Sinus sama dengan $\frac{O}{H}$, jadi sisi yang berhadapan adalah x dan sisi miringnya adalah 4. Panjang sisi yang berdekatan kemudian secara otomatis sama dengan radikal Anda, $\sqrt{16 - x^2}$. Lihat Gambar 10-6.



Gambar 10-6: Segitiga SohCahToa untuk kasus $\sqrt{a^2 - u^2}$

2. **Selesaikan $(\theta) = \frac{x}{4}$ untuk x, bedakan, dan selesaikan untuk dx.**

$$\frac{x}{4} = \sin(\theta)$$
$$x = 4\sin(\theta)$$
$$\frac{dx}{d\theta} = 4\cos(\theta)$$
$$dx = 4\cos(\theta)d\theta$$

3. **Temukan fungsi trigonometri mana yang sama dengan radikal di atas a, dan kemudian selesaikan untuk akarnya.**

   Perhatikan segitiga pada Gambar 10-6. radikal, $\sqrt{16 - x^2}$, di atas a, 4, adalah $\frac{A}{H}$, yang Anda ketahui dari SohCahToa sama dengan cosinus. Jadi itu memberi Anda

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}, \text{ and thus}$$
$$\sqrt{16-x^2} = 4\cos(\theta)$$

4. **Gunakan hasil dari Langkah 2 dan 3 untuk membuat substitusi dalam masalah asli, kemudian integrasikan**.

Perhatikan bahwa dalam masalah khusus ini, Anda harus melakukan tiga pergantian, bukan hanya dua seperti pada contoh pertama. Dari Langkah 2 dan 3 yang Anda dapatkan , $x = 4sin(\theta), dx = 4cos(\theta)d(\theta)$, dan $\sqrt{16 - x^2} = 4cos(\theta)$, sehingga

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{4\cos(\theta)d\theta}{\left(4\sin(\theta)\right)^2 4\cos(\theta)}$$

$$= \int \frac{d\theta}{16\sin^2(\boldsymbol{\theta})}$$

$$= \frac{1}{16}\int \csc^2(\theta)d\theta$$

$$= -\frac{1}{16}\cot(\theta) + C$$

5. **Segitiga menunjukkan bahwa $(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$. Ganti kembali untuk jawaban akhir Anda.**

$$= -\frac{1}{16} \cdot \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C$$

Kasus 3: Secants

Demi ruang — dan kewarasan — mari kita lewati kasus ini. Tetapi Anda tidak akan mengalami masalah dengan itu, karena semua langkah pada dasarnya sama seperti pada Kasus 1 dan 2. Coba yang ini. Mengintegrasikan $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$. Saya akan membantu Anda memulai. Pada Langkah 1, Anda menggambar segitiga, di mana $(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{a}}$, itu $\frac{x}{3}$. Sekarang ambil dari sana.

Anda harus mendapatkan: $\sqrt{x^2 - 9} - 3arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right) + C$.

10.5 PECAHAN PARSIAL

Anda menggunakan metode pecahan parsial untuk mengintegrasikan fungsi rasional seperti $\frac{6x^2+3x-2}{x^3+2x^2}$. Ide dasarnya melibatkan "tidak menambahkan" pecahan. Menambahkan berfungsi seperti ini: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Jadi Anda bisa "membatalkan" $\frac{5}{6}$ dengan membaginya menjadi $\frac{1}{2}$ plus$\frac{5}{6}$. Inilah yang Anda lakukan dengan teknik pecahan parsial kecuali Anda melakukannya dengan fungsi rasional yang rumit dan bukan pecahan biasa.

Kasus 1: Penyebut hanya berisi faktor linier

Mengintegrasikan $\int \frac{5}{x^2+x-6} dx$. Ini adalah Kasus 1 karena penyebut terfaktor (lihat Langkah 1) hanya berisi faktor linier.

1. **Faktorkan penyebutnya.**

$$\frac{5}{x^2+x-6}=\frac{5}{(x-2)(x+3)}$$

2. **Bagi pecahan di sebelah kanan menjadi jumlah pecahan, di mana setiap faktor penyebut pada Langkah 1 menjadi penyebut pecahan terpisah. Kemudian masukkan bilangan yang tidak diketahui ke dalam pembilang setiap pecahan.**

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+3)}$$

3. **Kalikan kedua ruas persamaan ini dengan penyebut ruas kiri.**

$$5=A(x+3)+B(x-2)$$

4. **Ambil akar faktor linier dan masukkan — satu per satu — ke x dalam persamaan dari Langkah 3, dan selesaikan untuk yang tidak diketahui.**

$$\begin{array}{ll} \text{If } x=2, & \text{If } x=-3, \\ 5=A(2+3)+B(2-2) & 5=A(-3+3)+B(-3-2) \\ 5=5A & 5=-5B \\ A=1 & B=-1 \end{array}$$

5. **Masukkan hasil ini ke A dan B dalam persamaan dari Langkah 2.**

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{(x-2)}+\frac{-1}{(x+3)}$$

6. **Pisahkan integral asli menjadi pecahan parsial dari Langkah 5 dan Anda bebas di rumah.**

$$\begin{aligned}\int\frac{5}{x^2+x-6}dx &= \int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{-1}{x+3}dx \\ &= \ln|x-2|-\ln|x+3|+C \\ &= \ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C \quad \text{(the log of a quotient rule)}\end{aligned}$$

Kasus 2: Penyebutnya mengandung faktor kuadrat yang tidak dapat difaktorkan

Terkadang Anda tidak dapat memfaktorkan penyebut sampai ke faktor linier karena beberapa kuadrat tidak dapat difaktorkan.

Inilah masalahnya: Integrasikan $\int\frac{5x^3+9x-4}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx$.

1. **Faktorkan penyebutnya.**
   Sudah selesai! Perhatikan bahwa $x^2 + 4$ tidak dapat difaktorkan.
2. **Pecah pecahan menjadi jumlah "pecahan sebagian".**
   Jika Anda memiliki faktor kuadrat yang tidak dapat direduksi (seperti $x^2 + 4$), pembilang untuk pecahan parsial tersebut membutuhkan dua bilangan yang tidak diketahui dalam bentuk *Px + Q*.

$$\frac{5x^3+9x-4}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

3. **Kalikan kedua ruas persamaan ini dengan penyebut ruas kiri.**

$$5x^3+9x-4 = A(x-1)(x^2+4) + B(x)(x^2+4) + (Cx+D)x(x-1)$$

4. **Ambil akar faktor linier dan masukkan — satu per satu — ke x dalam persamaan dari Langkah 3, lalu selesaikan.**

$$\begin{array}{ll} \text{If } x=0, & \text{If } x=1, \\ -4=-4A & 10=5B \\ A=1 & B=2 \end{array}$$

   Tidak seperti dalam contoh Kasus 1, Anda tidak dapat menyelesaikan semua yang tidak diketahui dengan memasukkan akar faktor linier, sehingga Anda memiliki lebih banyak pekerjaan yang harus dilakukan.
5. **Masukkan ke dalam persamaan Langkah 3 nilai A dan B yang diketahui dan dua nilai untuk x yang tidak digunakan pada Langkah 4 untuk mendapatkan sistem dua persamaan di C dan D.**
   A = 1 dan B = 2, jadi

$$\begin{array}{ll} \text{If } x=-1, & \text{If } x=2, \\ -18=-10-10-2C+2D & 54=8+32+4C+2D \\ 2=-2C+2D & 14=4C+2D \\ 1=-C+D & 7=2C+D \end{array}$$

6. **Memecahkan sistem: $\mathbf{1 = -C + D}$ dan $\mathbf{7 = 2C + D}$.**
   Anda harus mendapatkan C = 2 dan D = 3.
7. **Pisahkan integral asal dan integralkan.**
   Dengan menggunakan nilai yang diperoleh pada Langkah 4 dan 6, A = 1, B = 2, C = 2, dan D = 3, dan persamaan dari Langkah 2, Anda dapat membagi integral asli menjadi tiga bagian:

$$\int \frac{5x^3+9x-4}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4}dx$$

Dan dengan aljabar dasar, Anda dapat membagi integral ketiga di sebelah kanan menjadi dua bagian, menghasilkan dekomposisi fraksi parsial akhir:

$$\int \frac{5x^3+9x-4}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{2x}{x^2+4}dx + \int \frac{3}{x^2+4}dx$$

Dua integral pertama mudah. Untuk yang ketiga, Anda menggunakan substitusi dengan $u = x^2 + 4$dan *du = 2xdx*. Yang keempat dilakukan dengan aturan arctangent yang harus Anda hafal: $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$.

$$\int \frac{5x^3+9x-4}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx = \ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln\left|x^2+4\right| + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$= \ln\left|x(x-1)^2(x^2+4)\right| + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

Kasus 3: Penyebutnya mengandung faktor berulang

Jika penyebut berisi faktor berulang (linier atau kuadrat), seperti $(x+5)^4$, inilah yang Anda lakukan: Katakan Anda ingin mengintegrasikan $\int \frac{1}{x^2\,(x-1)^3}dx$. x dalam penyebut memiliki pangkat 2, jadi Anda mendapatkan 2 pecahan parsial untuk x (untuk pangkat 1 dan 2); $(x-1)$ memiliki pangkat 3, jadi Anda mendapatkan 3 pecahan parsial untuk faktor tersebut (untuk pangkat 1, 2, dan 3). Berikut adalah bentuk umum dari dekomposisi pecahan parsial: $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-1)}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{(x-1)^3}$. Ini satu lagi. Anda putus menjadi $\frac{4x^2-x^2+8}{(2x-3)^2(x^2+1)^2}$ menjadi $\frac{A}{(2x-3)}+\frac{B}{(2x-3)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$. Saya melewatkan solusi untuk contoh-contoh ini.

Metodenya sama seperti pada Kasus 1 dan 2 di atas — hanya lebih berantakan.

Menyamakan koefisien

Inilah metode lain untuk menemukan huruf kapital Anda yang tidak diketahui yang harus Anda miliki di tas trik Anda. Katakanlah Anda mendapatkan yang berikut untuk persamaan Langkah 3 Anda:

$$2x^3+x^2-5x+4 = (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2x+2)$$

Persamaan ini tidak memiliki faktor linier, jadi Anda tidak dapat memasukkan akar untuk mendapatkan yang tidak diketahui. Sebagai gantinya, perluas sisi kanan persamaan:

$$2x^3 + x^2 - 5x + 4 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + 2Cx^2 + 2Cx + Dx^2 + 2Dx + 2D$$

Dan kumpulkan istilah seperti:

$$2x^3 + x^2 - 5x + 4 = (A + C)x^3 + (B + 2C + D)x^2 + (A + 2C + 2D)x + (B + 2D)$$

Kemudian samakan koefisien suku-suku yang sejenis dari ruas kiri dan kanan persamaan:

$$\begin{aligned} 2 &= A + C \\ 1 &= B + 2C + D \\ -5 &= A + 2C + 2D \\ 4 &= B + 2D \end{aligned}$$

Anda kemudian memecahkan sistem persamaan simultan ini untuk mendapatkan A, B, C, dan D.

Singkatnya, Anda memiliki tiga cara untuk mencari A, B, C, dst.: 1) Memasukkan akar-akar faktor linier penyebut jika ada, 2) Memasukkan nilai x lain dan menyelesaikan hasilnya sistem persamaan, dan 3) Menyamakan koefisien suku-suku sejenis. Dengan latihan, Anda akan mahir dalam menggabungkan metode ini untuk menemukan yang tidak diketahui dengan cepat.

BAB 11
MENGGUNAKAN INTEGRAL UNTUK MEMECAHKAN MASALAH

Dalam Bab Ini

- Menjumlahkan luas antar kurva
- Mencari tahu volume bentuk aneh
- Menemukan panjang busur

Seperti yang saya katakan di Bab 8, integrasi pada dasarnya adalah menjumlahkan potongan-potongan kecil dari sesuatu untuk mendapatkan total keseluruhan — potongan-potongan yang sangat kecil, sebenarnya, potongan-potongan yang sangat kecil.

$$\int_{5\text{ sec.}}^{20\text{ sec.}} \textit{little piece of distance}$$

Jadi, integral memberitahu Anda untuk menjumlahkan semua bagian kecil dari jarak yang ditempuh selama interval 15 detik dari 5 hingga 20 detik untuk mendapatkan total jarak yang ditempuh selama interval tersebut. Dalam semua masalah, potongan kecil setelah simbol integrasi selalu merupakan ekspresi dalam x (atau variabel lain). Untuk integral di atas, misalnya, potongan kecil jarak dapat diberikan oleh, katakanlah, x^2dx. Maka integral tentu

$$\int_{5}^{20} x^2\, dx$$

akan memberi Anda total jarak yang ditempuh. Tantangan utama Anda dalam bab ini hanyalah membuat ekspresi aljabar untuk potongan-potongan kecil yang Anda jumlahkan. Sebelum kita memulai masalah penjumlahan, saya ingin membahas beberapa topik integrasi lainnya.

11.1 TEOREMA NILAI RATA-RATA UNTUK INTEGRAL DAN NILAI RATA-RATA

Cara terbaik untuk memahami Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral adalah dengan diagram — lihat Gambar 11-1. Grafik di sebelah kiri pada Gambar 11-1 menunjukkan persegi panjang yang luasnya jelas lebih kecil dari luas di bawah kurva antara 2 dan 5. Persegi panjang ini memiliki ketinggian yang sama dengan titik terendah pada kurva pada interval 2 hingga 5. Grafik tengah menunjukkan persegi panjang yang tingginya sama dengan titik tertinggi pada kurva. Luasnya jelas lebih besar dari luas di bawah kurva. Sekarang Anda berpikir, "Bukankah ada persegi panjang yang lebih tinggi dari yang pendek dan lebih pendek dari yang tinggi yang luasnya sama dengan luas di bawah kurva?" Tentu saja. Dan persegi panjang ini jelas melintasi kurva di suatu tempat di interval. Ini disebut "persegi panjang nilai rata-rata," yang ditunjukkan di sebelah kanan, pada dasarnya merangkum Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral. Ini benar-benar hanya akal sehat. Tapi inilah omong kosongnya.

Gambar 11-1: Sebuah "bukti" visual dari teorema nilai rata-rata untuk integral.

Teorema Nilai Mean untuk Integral: Jika $f(x)$ adalah fungsi kontinu pada interval tertutup [a, b], maka terdapat bilangan c dalam interval tertutup sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

Teorema pada dasarnya hanya menjamin keberadaan persegi panjang nilai rata-rata.

Luas persegi panjang nilai rata-rata — yang sama dengan luas di bawah kurva — sama dengan panjang kali lebar, atau alas kali tinggi, kan? Jadi, jika Anda membagi luasnya, $\int_a^b f(x)dx$, dengan dasar, $(b-a)$, Anda mendapatkan tingginya, $f(c)$. Ketinggian ini adalah nilai rata-rata fungsi selama interval yang bersangkutan.

Nilai Rata-rata: Nilai rata-rata suatu fungsi $f(x)$ selama interval tertutup [a, b] adalah

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

yang merupakan tinggi dari nilai rata-rata persegi panjang.

Berikut ini contohnya: Berapa kecepatan rata-rata mobil antara t = 9 detik dan t = 16 detik yang kecepatannya dalam kaki per detik diberikan oleh fungsi $(t) = 30\sqrt{t}$? Menurut definisi nilai rata-rata, kecepatan rata-rata ini diberikan oleh

$$\frac{1}{16-9}\int_9^{16} 30\sqrt{t}\ dt$$

1. **Tentukan luas daerah di bawah kurva antara 9 dan 16.**

$$\int_{9}^{16} 30\sqrt{t}\ dt$$
$$= 30\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_{9}^{16}$$
$$= 30\left(\frac{128}{3} - \frac{54}{3}\right)$$
$$= 740$$

Omong-omong, area ini adalah total jarak yang ditempuh dari 9 hingga 16 detik. Apakah Anda melihat mengapa? Pertimbangkan persegi panjang nilai rata-rata untuk menjawab pertanyaan ini. Tingginya adalah kecepatan (karena nilai fungsi, atau ketinggian, adalah kecepatan) dan alasnya adalah jumlah waktu, jadi luasnya adalah kecepatan kali waktu yang sama dengan jarak.

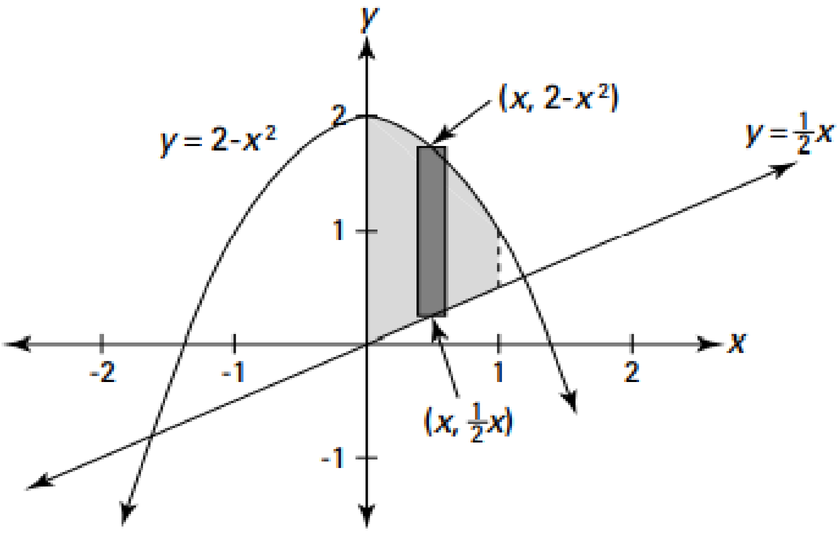
2. **Bagilah luas ini, jarak total, dengan interval waktu dari 9 hingga 16, yaitu 7.**

$$\textit{Average speed} = \frac{\textit{total distance}}{\textit{total time}} = \frac{740\ \textit{feet}}{7\ \textit{seconds}}$$
$$\approx 105.7\ \textit{feet per second}$$

Definisi nilai rata-rata memberitahu Anda untuk mengalikan luas total dengan $\frac{1}{b-a}$, yang dalam masalah ini adalah $\frac{1}{16-9}$, atau $\frac{1}{7}$. Tetapi karena membagi dengan 7 sama dengan mengalikan dengan $\frac{1}{7}$, Anda dapat membagi seperti yang saya lakukan pada langkah ini. Lebih masuk akal untuk memikirkan masalah ini dalam hal pembagian: luas sama dengan alas kali tinggi, jadi tinggi dari persegi panjang nilai rata-rata sama dengan luasnya dibagi alasnya.

11.2 LUAS ANTARA DUA KURVA

Ini adalah topik pertama dari tujuh topik dalam bab ini di mana tugas Anda adalah membuat ekspresi untuk sedikit sesuatu dan kemudian menjumlahkan bit dengan mengintegrasikan. Untuk jenis masalah pertama ini, bit kecilnya adalah persegi panjang sempit yang duduk di satu kurva dan naik ke yang lain. Berikut ini contohnya: Carilah luas antara $y = 2 - x^2$ dan $y = \frac{1}{2}x$ dari x = 0 hingga x = 1. Lihat Gambar 11-2.



Gambar 11-2: Area antara $= 2 - x^2$ dan $y = \frac{1}{2}x$ dari x = 0 hingga x = 1.

Untuk mendapatkan tinggi perwakilan persegi panjang pada Gambar 11-2, kurangi koordinat y bagian bawahnya dari koordinat y bagian atasnya — itu $(2 - x^2) - \frac{1}{2}x$. Basisnya adalah dx yang sangat kecil. Jadi, karena luas sama dengan tinggi kali alas,

$$\textit{Area of representative rectangle} = \left(\left(2 - x^2\right) - \frac{1}{2}x\right)dx$$

Sekarang jumlahkan luas semua persegi panjang dari 0 hingga 1 dengan mengintegrasikan:

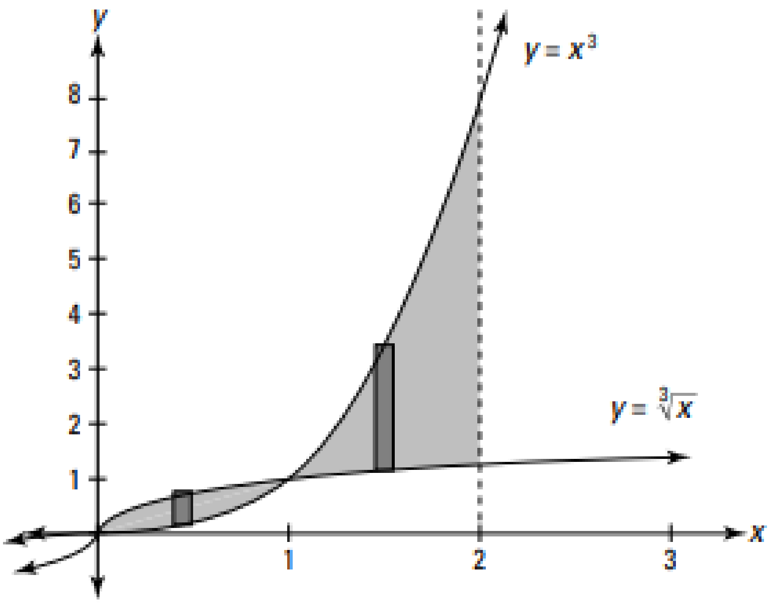
$$\int_0^1 \left(\left(2 - x^2\right) - \frac{1}{2}x\right)dx$$

$$= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 \text{(power rule for all 3 pieces)}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0 - 0 - 0)$$

$$= \frac{17}{12} \text{ square units}$$

Untuk membuat hal-hal sedikit lebih bengkok, dalam masalah berikutnya kurva bersilangan (lihat Gambar 11-3). Ketika ini terjadi, Anda harus membagi total area yang diarsir menjadi dua wilayah terpisah sebelum diintegrasikan. Hitunglah luas antara $\sqrt[3]{x}$ dan x^3 dari x = 0 sampai x = 2.



Gambar 11-3: Siapa di atas?

1. **Tentukan di mana kurva bersilangan.**
   Mereka bersilangan di (1, 1), jadi Anda memiliki dua wilayah terpisah — satu dari 0 hingga 1 dan lainnya dari 1 hingga 2.
2. **Gambarlah luas daerah di sebelah kiri.**
   Untuk wilayah ini, $\sqrt[3]{x}$ di atas x^3. Jadi tinggi sebuah persegi panjang yang mewakili adalah $\sqrt[3]{x} - x^3$, luasnya adalah tinggi kali alas, atau $\left(\sqrt[3]{x} - x^3\right)dx$, dan luas daerah adalah, oleh karena itu,

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) - (0 - 0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. **Gambarlah luas daerah di sebelah kanan.**
   Sekarang, x^3 di atas $\sqrt[3]{x}$, jadi tinggi persegi panjang adalah $x^3 - \sqrt[3]{x}$ dan dengan demikian Anda dapatkan

$$\int_1^2 \left(x^3 - \sqrt[3]{x}\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^2$$
$$= \left(4 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)$$
$$= 4.5 - 1.5\sqrt[3]{2}$$

4. **Jumlahkan luas kedua daerah untuk mendapatkan luas total.**
   $0.5 + 4.5 - 1.5\sqrt[3]{2} \approx 3.11$ square units

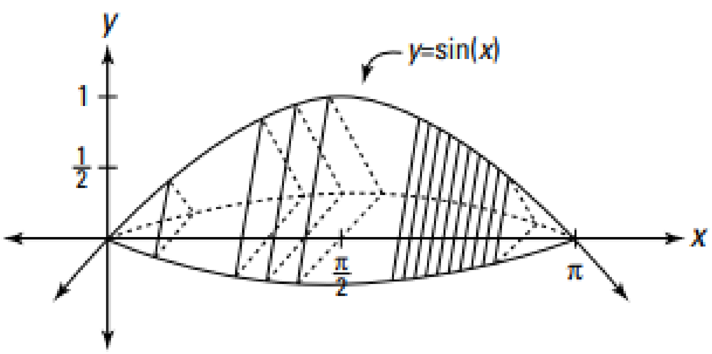
11.3 VOLUME PADAT ANEH

Integrasi memungkinkan Anda menghitung volume bentuk yang tidak dapat Anda peroleh dengan rumus geometri dasar.

Metode pengiris daging

Metafora ini sebenarnya cukup akurat. Bayangkan sebongkah daging dipotong menjadi irisan yang sangat tipis di salah satu alat pengiris delimaat itu. Itulah ide dasarnya di sini. Anda mengiris bentuk tiga dimensi, lalu menjumlahkan volume irisan untuk menentukan volume total.

Berikut soal: Berapa volume benda padat yang panjangnya sepanjang sumbu x dari 0 ke π dan yang penampangnya tegak lurus terhadap sumbu x adalah segitiga sama sisi sehingga titik tengah alasnya terletak pada sumbu x dan bagian atasnya simpul berada pada kurva $y = \sin(x)$? Itu seteguk atau apa? Masalah ini hampir lebih sulit untuk dijelaskan dan digambarkan daripada dilakukan. Perhatikan hal ini pada Gambar 11-4.



Gambar 11-4: Satu bongkahan pastrami yang aneh.

Jadi berapa volumenya?

1. **Tentukan luas penampang yang lama.**
   Setiap penampang adalah segitiga sama sisi dengan tinggi (x). Jika Anda melakukan geometri, Anda akan melihat bahwa alasnya adalah $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ kali tingginya, atau $\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sin(x)$ (Petunjuk: Setengah dari segitiga sama sisi adalah segitiga 30°-60°-90°). Jadi, luas segitiga, diberikan oleh $A = \frac{1}{2}(b)(h)$ adalah $\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sin(x)\right)\sin(x)$, atau $\frac{\sqrt{3}}{3}sin^2 x$.

2. **Temukan volume irisan yang representatif.**
   Volume suatu irisan hanyalah luas penampang dikalikan ketebalannya yang sangat kecil, dx. Jadi Anda mendapatkan volumenya:

$$\textit{Volume of representative slice} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2(x)\,dx$$

3. **Jumlahkan volume irisan dari 0 hingga π dengan mengintegrasikan.**

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2(x)\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx \left(\begin{array}{l}\text{trig integrals with sines} \\ \text{and cosines, Case 3,} \\ \text{from Chapter 10}\end{array}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \cos(2x)\,dx\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\left([x]_0^\pi - \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\pi - 0 - \left(\frac{\sin(2\pi)}{2} - \frac{\sin(0)}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}(\pi - 0 - (0-0)) \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \\
&\approx 0.91\,\textit{cubic units}
\end{aligned}
$$

Metode disk

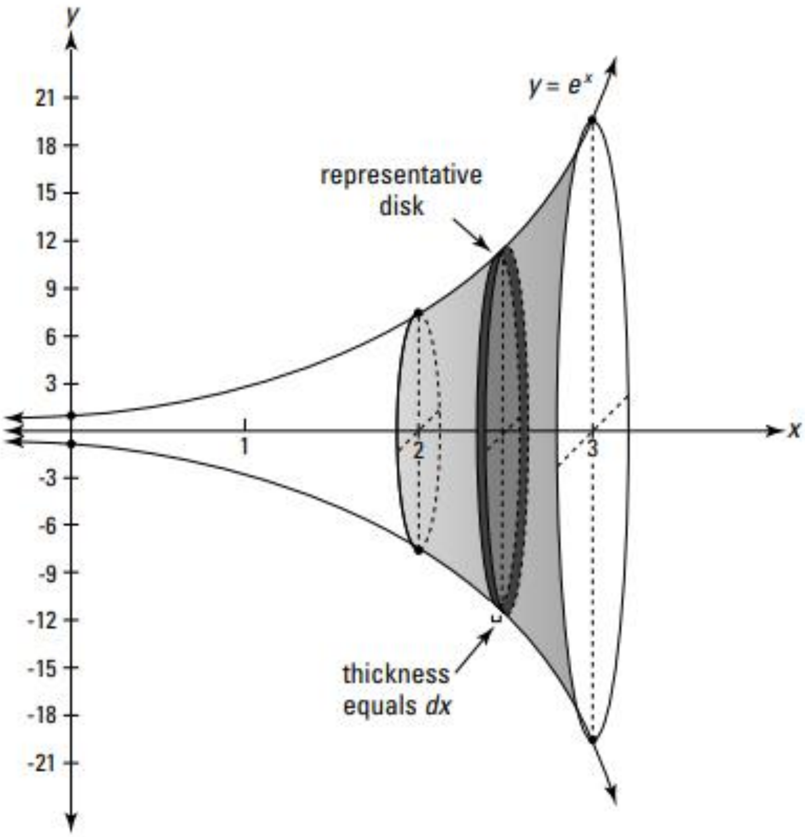
Teknik ini adalah kasus khusus dari metode pengiris daging yang Anda gunakan ketika penampang semua lingkaran. Temukan volume benda — antara x = 2 dan x = 3 — yang dihasilkan dengan memutar kurva $y = e^x$ terhadap sumbu x. Lihat Gambar 11-5.

1. **Tentukan luas penampang lama atau piringan representatif.**
   Setiap penampang adalah lingkaran dengan jari-jari e^x. Jadi, luasnya diberikan oleh rumus luas lingkaran, $A = \pi r^x$. Memasukkan e^x ke r memberi Anda

$$A = \pi\left(e^x\right)^2 = \pi e^{2x}$$

2. **Tack pada dx untuk mendapatkan volume disk representatif yang sangat tipis.**

$$Volume\ of\ disk = \overbrace{\pi e^{2x}}^{area} \cdot \overbrace{dx}^{thickness}$$



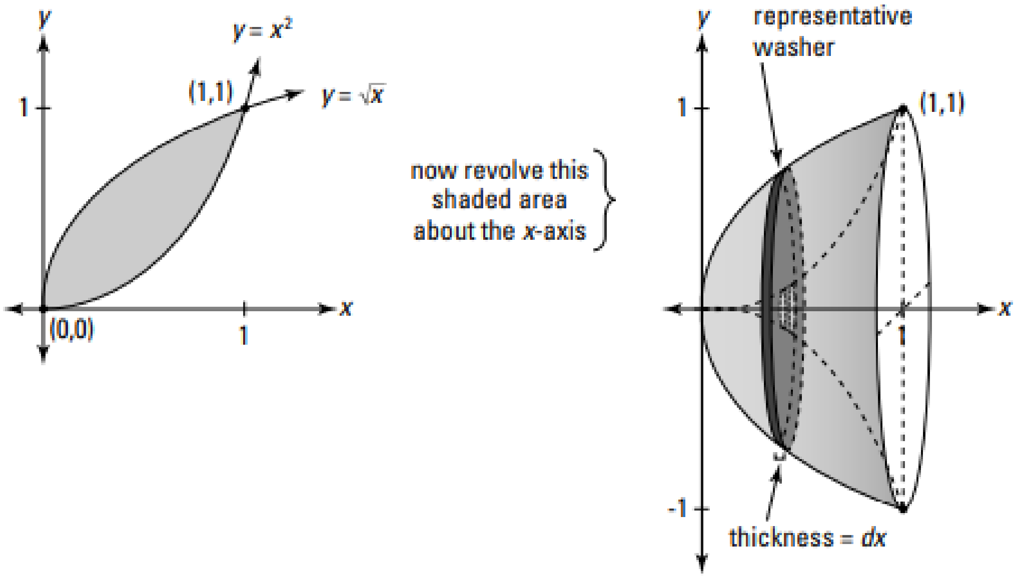
Gambar 11-5: Tumpukan disk yang menyamping.

3. **Tambahkan volume disk dari 2 menjadi 3 dengan mengintegrasikan.**

$$\begin{aligned} Total\ volume &= \int_2^3 \pi e^{2x} dx \\ &= \pi \int_2^3 e^{2x} dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_2^3 (\text{by substitution with } u = 2x \text{ and } du = 2dx) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(e^6 - e^4\right) \\ &\approx 548\ cubic\ units \end{aligned}$$

Metode pencucian

Satu-satunya perbedaan antara metode washer dan metode disk adalah bahwa sekarang setiap irisan memiliki lubang di tengahnya yang harus Anda kurangi. Ambil area yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$, dan hasilkan benda padat dengan memutar area tersebut terhadap sumbu x. Lihat Gambar 11-6.



Gambar 11-6: Tumpukan mesin cuci menyamping — cukup tambahkan volume semua mesin cuci.

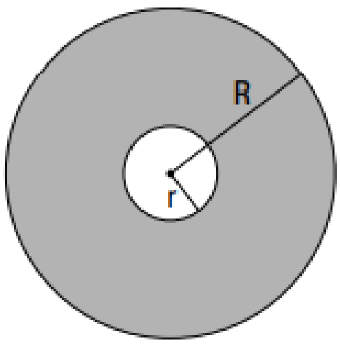
Jadi berapa volume bentuk seperti mangkuk ini?

1. **Tentukan di mana dua kurva berpotongan.**

   Diperlukan sedikit percobaan dan kesalahan untuk melihat itu $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$ berpotongan di x = 0 dan x = 1. Jadi benda padat tersebut merentang interval pada sumbu x dari 0 hingga 1.

2. **Gambarkan luas penampang tipis washer.**

   Setiap irisan berbentuk mesin cuci — lihat Gambar 11-7 — jadi luasnya sama dengan luas seluruh lingkaran dikurangi luas lubang.



Gambar 11-7: Area yang diarsir sama dengan $R^2 - \pi r^2$: Seluruhnya dikurangi lubang - mengerti?

Luas lingkaran dikurangi lubangnya adalah $\pi R^2 - \pi r^2$, di mana R adalah jari-jari luar (jari-jari besar) dan r adalah jari-jari lubang (jari-jari kecil). Untuk soal ini, jari-jari luarnya adalah $\sqrt{x}$ dan jari-jari lubangnya adalah x^2, sehingga memberikan

$$A = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 - \pi\left(x^2\right)^2$$
$$= \pi x - \pi x^4$$

3. **Kalikan area ini dengan ketebalan, dx, untuk mendapatkan volume mesin cuci yang representatif.**

$$Volume = \left(\pi x - \pi x^4\right)dx$$

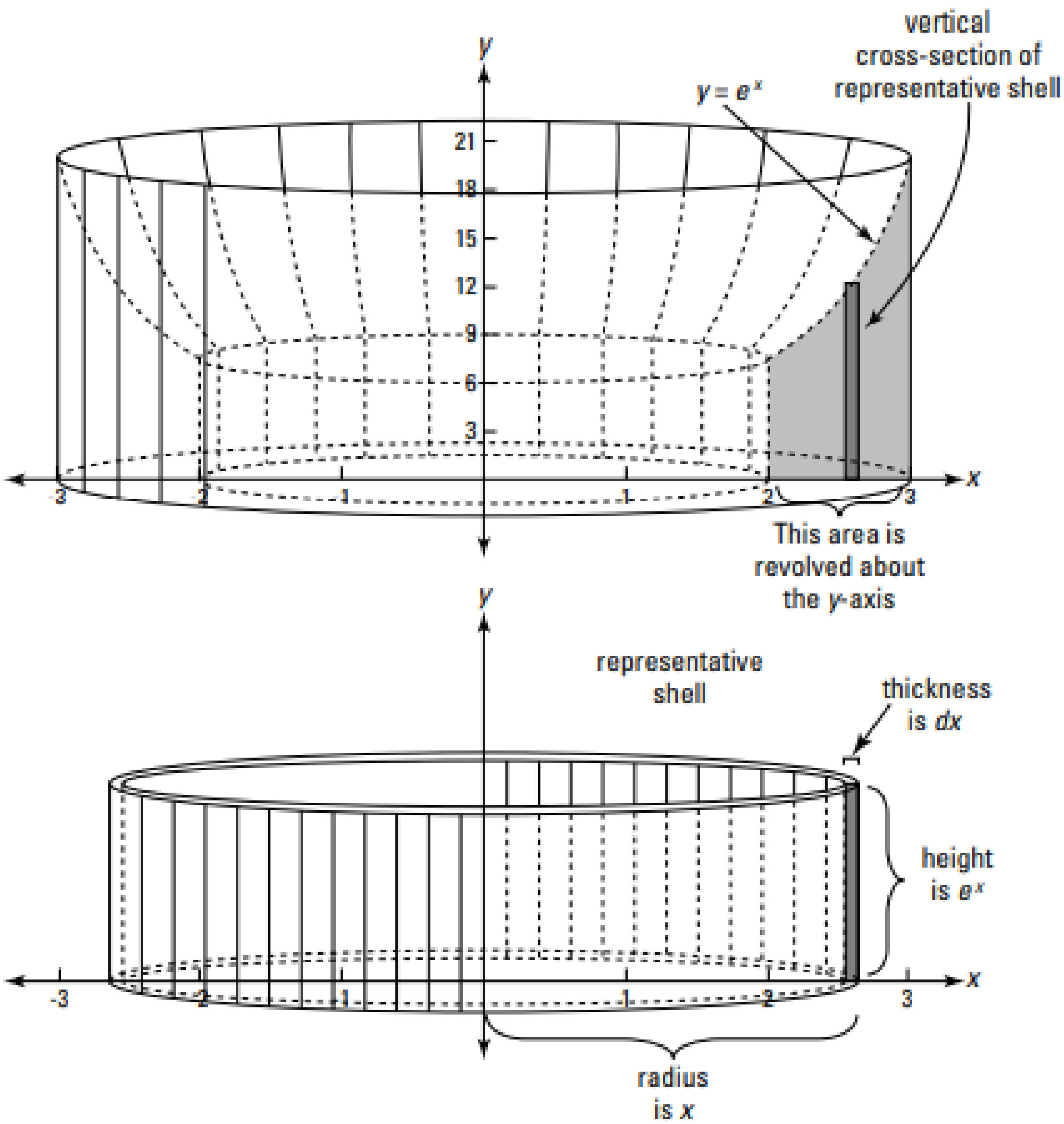
4. **Tambahkan volume mesin cuci yang lebih tipis dari kertas setipis kertas dari 0 menjadi 1 dengan mengintegrasikan.**

$$\begin{aligned} Total\ volume &= \int_0^1 \left(\pi x - \pi x^4\right)dx \\ &= \pi\int_0^1 \left(x - x^4\right)\, dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \pi\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0-0)\right] \\ &= \frac{3}{10}\pi \\ &\approx 0.94\ cubic\ units \end{aligned}$$

Metode boneka matryoshka

Sekarang Anda akan memotong benda padat menjadi silinder konsentris tipis dan kemudian menjumlahkan volume semua silinder. Ini seperti bagaimana boneka Rusia (matryoshka) yang bersarang itu cocok satu sama lain. Atau bayangkan kaleng sup yang entah bagaimana memiliki banyak label kertas, masing-masing menutupi label di bawahnya. Atau bayangkan salah satu pakaian itu terlepas dengan kertas lengket yang Anda kelupas. Setiap sup bisa diberi label atau selembar kertas lengket adalah cangkang silindris — sebelum Anda merobeknya, tentu saja. Setelah Anda merobeknya, itu adalah persegi panjang biasa.

Inilah masalahnya: Sebuah benda padat dihasilkan dengan mengambil luas yang dibatasi oleh sumbu x, garis x = 2, x = 3, dan $y = e^2$, dan kemudian memutarnya terhadap sumbu y. Berapa volumenya? Lihat Gambar 11-8.



Gambar 11-8: Suatu bentuk seperti Coliseum Romawi dan salah satu cangkang perwakilannya.

1. **Tentukan luas kulit silinder yang representatif.**

   Saat membayangkan cangkang representatif, fokuslah pada cangkang yang tidak ada di tempat tertentu. Gambar 11-8 menunjukkan shell generik seperti itu. Jari-jarinya tidak diketahui, x, dan tingginya adalah tinggi kurva di x, yaitu e^x. Jika, sebaliknya, Anda menggunakan cangkang khusus seperti kulit terluar dengan radius 3, kemungkinan besar Anda akan membuat kesalahan dengan berpikir bahwa cangkang representatif memiliki radius yang diketahui seperti 3 atau ketinggian yang diketahui seperti e^3. Jari-jari dan tingginya tidak diketahui. (Saran ini juga berlaku untuk masalah disk dan mesin cuci.)

   Setiap cangkang representatif, seperti label kaleng sup atau lembaran lengket dari de-linter, hanyalah persegi panjang yang tentu saja luasnya adalah panjang kali lebarnya. Label kaleng sup persegi panjang melingkari kaleng, jadi panjangnya adalah keliling kaleng, yaitu $2\pi r$; lebar label adalah tinggi kaleng. Jadi sekarang Anda memiliki rumus umum untuk luas kulit yang representatif:

$$\begin{aligned} Area &= length \cdot width \\ &= 2\pi r \cdot h \end{aligned}$$

Untuk masalah saat ini, Anda memasukkan x untuk jari-jari dan e^x tinggi, memberikan Anda luas kulit yang mewakili:

$$Area\ of\ shell = 2\pi x \cdot e^x$$

2. **Kalikan luas dengan ketebalan cangkang, dx, untuk mendapatkan volumenya.**

$$Volume\ of\ representative\ shell = 2\pi x e^x dx$$

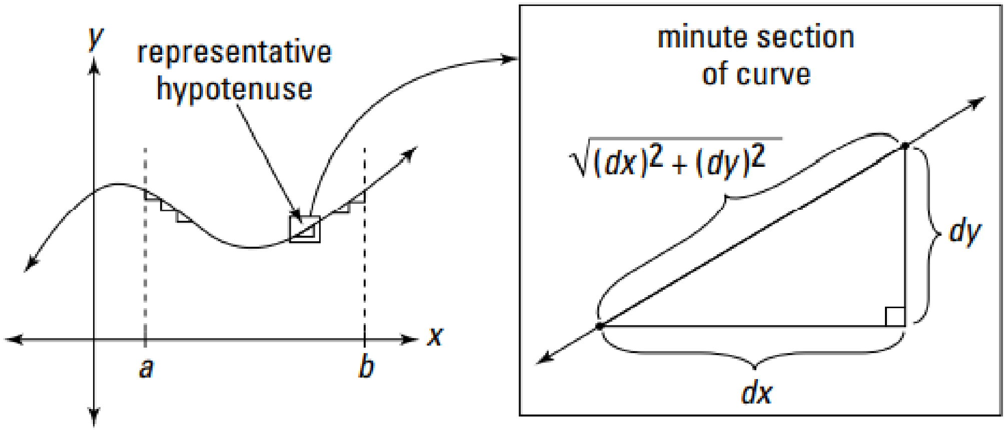
3. **Jumlahkan volume semua kulit dari 2 hingga 3 dengan pengintegralan.**

$$\begin{aligned} Total\ volume &= \int_2^3 2\pi x e^x\, dx \\ &= 2\pi \int_2^3 x e^x\, dx \\ &= 2\pi \left[x e^x - e^x \right]_2^3 \text{ (integration by parts)} \end{aligned}$$

Dengan metode pengiris daging, piringan, dan mesin cuci, biasanya cukup jelas batas integrasi yang seharusnya (ingat bahwa batas integrasi, misalnya, 1 dan 5 in $\int_1^5$). Namun, dengan cangkang silinder, tidak selalu sejelas itu. Tip: Anda berintegrasi dari tepi kanan silinder terkecil ke tepi kanan silinder terbesar (seperti dari 2 hingga 3 pada soal sebelumnya). Dan perhatikan bahwa Anda tidak pernah mengintegrasikan dari tepi kiri ke tepi kanan silinder terbesar (seperti dari ke 3).

11.4 PANJANG BUSUR

Sejauh ini dalam bab ini, Anda telah menjumlahkan luas persegi panjang tipis untuk mendapatkan luas total, dan volume irisan tipis atau silinder tipis untuk mendapatkan volume total. Sekarang, Anda akan menjumlahkan panjang menit di sepanjang kurva, "busur", untuk mendapatkan panjang keseluruhan. Idenya adalah untuk membagi panjang kurva menjadi bagian-bagian kecil, menghitung panjang masing-masing, dan kemudian menjumlahkan semuanya. Gambar 11-9 menunjukkan bagaimana setiap bagian kurva didekati dengan hipotenusa segitiga siku-siku kecil.



Gambar 11-9: Teorema Pythagoras, $a^2 + b^2 = c^2$, adalah kunci dari rumus panjang busur.

Anda dapat membayangkan bahwa saat Anda memperbesar lebih jauh dan lebih jauh, membagi kurva menjadi lebih banyak bagian, bagian menit menjadi lebih lurus dan lebih lurus dan sisi miring menjadi perkiraan kurva yang lebih baik dan lebih baik. Jadi, yang harus Anda lakukan adalah menjumlahkan semua sisi miring di sepanjang kurva antara titik awal dan akhir Anda. Panjang kaki setiap segitiga sangat kecil adalah dx dan dy, dan dengan demikian panjang sisi miring — yang diberikan oleh Teorema Pythagoras — adalah

$$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

Untuk menjumlahkan semua hipotenusa dari a ke b sepanjang kurva, cukup integrasikan:

$$\int_a^b \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

Sedikit penyesuaian dan Anda memiliki rumus untuk panjang busur. Pertama, faktorkan a di bawah akar kuadrat dan sederhanakan:

$$\int_a^b \sqrt{(dx)^2\left[1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right]} = \int_a^b \sqrt{(dx)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

Sekarang Anda mengambil akar kuadrat dari $(dx)^2$— itu dx, tentu saja — membawanya ke luar radikal, dan, voila, Anda mendapatkan rumusnya.

Panjang Busur: Panjang busur sepanjang kurva, $= f(x)$, dari a ke b, diberikan oleh integral berikut:

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Ekspresi di dalam integral ini hanyalah panjang hipotenusa representatif.

Coba ini: Berapa panjang $y = (x-1)^{3/2}$ dari x = 1 ke x = 5?

1. **Ambil turunan dari fungsi Anda.**

$$y = (x-1)^{3/2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}$$

2. **Masukkan ini ke dalam rumus dan integrasikan.**

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$= \int_1^5 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x-1)^{1/2}\right)^2}\,dx$$
$$= \int_1^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}dx$$
$$= \int_1^5 \left(\frac{9}{4}x-\frac{5}{4}\right)^{1/2}dx$$
$$= \left[\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{9}{4}x-\frac{5}{4}\right)^{3/2}\right]_1^5$$

(Lihat bagaimana saya mendapatkannya? Ini adalah teknik integrasi tebak dan periksa dengan aturan kekuatan terbalik. 4/9 adalah jumlah tweak yang Anda butuhkan karena koefisien 9/4.)

$$= \left[\frac{1}{27}(9x-5)^{3/2}\right]_1^5 \text{ (It's just algebra!)}$$
$$= \frac{1}{27}\left(\sqrt{40}\right)^3 - \frac{1}{27}\cdot\left(\sqrt{4}\right)^3$$
$$= \frac{8}{27}\left(\left(\sqrt{10}\right)^3 - 1\right)$$
$$\approx 9.07\ units$$

11.5 INTEGRAL TAK WAJAR

Integral tentu tidak wajar jika integral tersebut bergerak jauh ke atas, bawah, kanan, atau kiri. Mereka naik atau turun jauh dalam kemungkinan lem seperti itu $\int_2^4 \frac{1}{x-3}\,dx$ memiliki satu atau lebih asimtot vertikal. Mereka pergi jauh ke kanan atau kiri dalam masalah seperti $\int_5^\infty \frac{1}{x^2}dx$ atau $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$, di mana salah satu atau kedua batas integrasi tidak terbatas. Masuk akal untuk menggunakan istilah tak hingga daripada tidak tepat untuk menggambarkan integral ini, kecuali bahwa banyak dari integral "tak hingga" ini memiliki luas hingga. Lebih lanjut tentang ini dalam satu menit.

Anda memecahkan kedua jenis integral tak wajar dengan mengubahnya menjadi masalah limit. Lihatlah beberapa contoh.

Integral tak wajar dengan asimtot vertikal

Sebuah asimtot vertikal mungkin berada di tepi area yang bersangkutan atau di tengahnya.

Sebuah asimtot vertikal di salah satu batas integrasi

Berapakah luas di bawah $y = \frac{1}{x^2}$ dari 0 sampai 1? Fungsi ini tidak terdefinisi pada x = 0, dan memiliki asimtot vertikal di sana. Jadi, Anda harus mengubah integral tertentu menjadi suatu limit:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{c\to0^+}\int_c^1 \frac{1}{x^2}dx \left(\begin{array}{l}\text{The area in question is to the}\\ \text{right of zero, so } c \text{ approaches}\\ \text{zero from the right.}\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_c^1 \text{ (reverse power rule)}\\
&= \lim_{x\to0^+}\left((-1)-\left(-\frac{1}{c}\right)\right)\\
&= -1-(-\infty)\\
&= -1+\infty\\
&= \infty
\end{aligned}$$

Area ini tidak terbatas, yang mungkin tidak mengejutkan Anda karena kurvanya naik hingga tak terbatas. Tapi berpegang pada topi Anda — fungsi berikutnya juga naik hingga tak terhingga pada x = 0, tetapi luasnya terbatas!

Temukan area di bawah $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ dari 0 hingga 1. Fungsi ini juga tidak terdefinisi pada x = 0, sehingga proses penyelesaiannya sama seperti pada contoh sebelumnya.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx &= \lim_{c\to0^+}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx\\
&= \lim_{c\to0^+}\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_c^1 \text{ (reverse power rule)}\\
&= \lim_{c\to0^+}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}c^{2/3}\right)\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Konvergensi dan Divergensi: Anda mengatakan bahwa integral tak wajar konvergen jika limitnya ada, yaitu, jika limitnya sama dengan bilangan terhingga seperti pada contoh kedua. Jika tidak, integral tak wajar dikatakan divergen — seperti pada contoh pertama. Ketika integral tak wajar divergen, luas yang dimaksud (atau bagiannya) biasanya sama dengan ∞ atau $-\infty$.

Sebuah asimtot vertikal antara batas-batas integrasi

Jika titik tak terdefinisi dari integral berada di antara batas-batas integrasi, Anda membagi integral menjadi dua — pada titik yang tidak ditentukan — kemudian ubah setiap integral menjadi suatu limit dan pergi dari sana. Evaluasi $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$. Integran ini tidak terdefinisi pada x = 0.

1. **Bagi integral menjadi dua di titik yang tidak ditentukan.**

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

2. **Ubah setiap integral menjadi limit dan evaluasi.**

   Untuk $\int^{0}$ integral, luasnya berada di sebelah kiri nol, sehingga c mendekati nol dari kiri. Untuk $\int_{0}^{8}$ integral, luasnya di sebelah kanan nol, jadi c mendekati nol dari kanan.

$$= \lim_{c \to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \lim_{c \to 0^+} \int_{c}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_{-1}^{c} + \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_{c}^{8}$$

$$= \lim_{c \to 0^-} \left(\frac{3}{2} c^{2/3} - \frac{3}{2} \right) + \lim_{c \to 0^+} \left(6 - \frac{3}{2} c^{2/3} \right)$$

$$= -\frac{3}{2} + 6$$

$$= 4.5$$

Jika Anda gagal memperhatikan bahwa integral memiliki titik yang tidak terdefinisi antara batas-batas integrasi, dan Anda mengintegrasikan cara biasa, Anda mungkin mendapatkan jawaban yang salah. Masalah diatas, $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$, kebetulan berhasil dengan baik jika Anda melakukannya dengan cara biasa. Namun, jika Anda $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ melakukan cara biasa, tidak hanya apakah Anda salah, Anda mendapatkan jawaban absurd dari negatif 2, meskipun fungsinya positif dari -1 hingga 1. Jangan ambil risiko.

Jika salah satu bagian dari integral pemisah divergen, integral aslinya divergen. Anda tidak bisa mendapatkan, katakanlah $-\infty$, untuk satu bagian dan ∞ untuk bagian lain dan menambahkannya untuk mendapatkan nol.

Integral tak wajar dengan batas integral tak hingga

Anda melakukan integral tak wajar ini dengan mengubahnya menjadi batas di mana c mendekati tak hingga atau tak hingga negatif. Berikut adalah dua contoh: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ dan $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x^2}dx\\ &= \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^c\\ &= \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{c}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right)\\ &= 0-(-1)\\ &= 1\end{aligned}$$

Jadi integral tak wajar ini konvergen. Pada integral berikutnya, penyebutnya lebih kecil — x daripada x^2— dan dengan demikian pecahan lebih besar, jadi Anda berharap $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ lebih besar dari $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, yang itu. Tapi itu tidak hanya lebih besar, itu cara, cara lebih besar.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}dx &= \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}dx\\ &= \lim_{c\to\infty}[\ln x]_1^c\\ &= \lim_{c\to\infty}(\ln c-\ln 1)\\ &= \infty-0\\ &= \infty\end{aligned}$$

Integral tak wajar ini divergen.

Ketika kedua batas integrasi tidak terbatas, Anda membagi integral menjadi dua dan mengubah setiap bagian menjadi batas. Memisahkan integral pada x = 0 mudah karena nol adalah angka yang mudah untuk ditangani, tetapi Anda dapat membaginya di mana saja. Nol mungkin juga tampak seperti pilihan yang baik karena sepertinya berada di tengah-tengah $-\infty$ dan ∞. Tapi itu ilusi karena tidak ada tengah antara $-\infty$ dan ∞, atau bisa dibilang titik mana pun pada sumbu x adalah tengahnya.

Berikut ini contohnya: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$

1. **Bagi integral menjadi dua.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$$

2. **Ubah setiap bagian menjadi batas.**

$$\lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx + \lim_{c \to \infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{x^2+1}dx$$

3. **Evaluasi setiap bagian dan jumlahkan hasilnya.**

$$\begin{aligned}
&= \lim_{c \to -\infty} \left[\arctan x\right]_c^0 + \lim_{c \to \infty} \left[\arctan x\right]_0^c \\
&= \lim_{c \to -\infty} \left(\arctan 0 - \arctan c\right) + \lim_{c \to \infty} \left(\arctan c - \arctan 0\right) \\
&= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Jika salah satu integral "setengah" divergen, seluruh divergen.

BAB 12
TUJUH HAL YANG PERLU DIINGAT

Dalam Bab Ini

- Konsep kalkulus kritis (dan pra-kalkulus)
- Informasi yang menyelamatkan jiwa (atau setidaknya hemat kelas)

12.1 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Pola faktor ini, quasi-ubiquitous dan agak ada di mana-mana, digunakan dalam banyak masalah, dan melupakannya akan menyebabkan banyak kesalahan. Itu besar. Jangan lupakan itu.

12.2 $\frac{0}{5} = 0$ TAPI $\frac{5}{0}$ TIDAK TERDEFINISI

Anda tahu bahwa $\frac{8}{2} = 4$, jadi 4 kali 2 adalah 8. Jika $\frac{5}{0}$ ada jawaban, jawaban dikalikan nol harus sama dengan 5. Tapi itu tidak mungkin, membuat $\frac{5}{0}$ tidak terdefinisi.

12.3 SOHCAHTOA

Tidak, ini bukan kepala suku India yang terkenal, hanya pengingat untuk mengingat tiga fungsi trigonometri dasar Anda:

$$\sin\theta = \frac{O}{H} \quad \cos\theta = \frac{A}{H} \quad \tan\theta = \frac{O}{A}$$

Balikkan ini secara terbalik untuk fungsi timbal balik:

$$\csc\theta = \frac{H}{O} \quad \sec\theta = \frac{H}{A} \quad \cot\theta = \frac{A}{O}$$

12.4 NILAI TRIGGER UNTUK DIKETAHUI

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan 45^\circ = 1 \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Tidak perlu menghafal ini jika Anda tahu SohCahToa dan segitiga 45°-45°-90° dan 30°-60°-90° Anda.

12.5 $\boldsymbol{sin^2\theta + cos^2\theta = 1}$

Identitas ini berlaku untuk setiap sudut. Bagilah kedua sisi persamaan ini dengan $sin^2\theta$ dan Anda mendapatkan $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$; membagi kedua sisi dengan $cos^2\theta$ memberi Anda $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$.

12.6 ATURAN PRODUK

$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$. Sepotong kue.

12.7 ATURAN HASIL BAGI

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Berbeda dengan aturan perkalian, banyak siswa yang melupakan aturan hasil bagi. Tetapi Anda tidak akan melakukannya jika Anda hanya ingat bahwa itu dimulai seperti aturan produk — dengan u'v.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., CALCULUS. A New Horizon, 6 th edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1999.

Bagio, T. H. (2010). Kalkulus Dasar.

Baisuni, H. M. Hasyim. (2005). Kalkulus. Jakarta. Universitas Indonesia-Press.

Chun, Changbum, "Some Improvement of Jarratt's Method with Sixth-order Convergence", Applied Mathematics and Computation. Vol. 190, halaman 1432-1437, 2007.

Edwin J. Purcell dan Dale Varbeg. "Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1". edisi 5, halaman 115-140, 459-464. Erlangga, Jakarta. 2005.

Fernandez, O. (2019). Calculus Simplified. Princeton University Press.

Finney, T., Kalkulus dan Geometri Analitik, terjemahan, jilid 1, edisi 6, Penerbit Erlangga, 1993.

Gazali, Wikaria, dkk. (2007). Kalkulus. Jakarta. Graha Ilmu.

Guichard, D. R. (2009). Calculus. In Whiteman.edu. https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/8/085201

Herman, E., &Strang, G. 2016. Calculus. OpenStax-Rice University. Houston.

Hoffman, Bradley, Subecki, and Price. 2013. Calculus: for Business, Economic, and the social and life science. Newyork: Mc.Graw Hill.

Kou Jisheng, Li Yitian and Wang Xiuhua, "Fourth-order Iterative Methods Free Second Derivative". Appl. Math. Comput.183.880-885, 2007.

LaTorre, D. R., Kenelly, J. W., Reed, I. B., Carpenter, L., R., & Harris, C. R. (2007). Calculus Concepts: An Applied Approach to the Mathematics of Change (4th ed.). Cengage Learning.

Leithold, L. 1991. Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis Edisi Kelima Jilid 1 (Terjemahan). Jakarta: Erlangga.

Leithold, L., Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik, terjemahan, jilid 1, edisi 5, Penerbit Erlangga, 1991.

Martono, K., Kalkulus 1, jilid 1 sampai 7, diktat, ITB.

Olsder, GJ. "Mathematical Sistem Theory". Halaman 26. University of Techonology, Delft. 1994.

Petrovic, J. S. (2020). Advanced calculus: theory and practice. CRC Press.

Purcell, Edwin J., & Varberg. D., & Rigdon, S. E. (2007). Calculus (9th Edition). Pearson.

Rademacher, H. (1954). Lectures on Analytic Number Theory. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research.

Ricardo, Henry J. “A Modern Introduction to Differential Equations”. edisi 2, halaman 131-157. Elsevier Academic Press, London. 2009.

Robbin, J. & Angenent, S. 2009. Math 221 – 1st Semester Calculus, Lecture Notes Version 2.0. University of Wisconsin-Madison Department of Mathematics. Madison.

Smith, Robert T., Roland B. Minton, Calculus Second Edition, MC Graw Hill, New York, 2002.

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. (2020). Calculus: early transcendentals. Cengage Learning.

Strang, G. 2010. Culculus 2ndEdition.Cambridge Press. Wellesley.

Thomas and Finney. 1998. Calculus and Analytic Geometry, 9thed. USA: Addison-Wesley.

Thomas. 2005.Calculus. Bostyon San Francisco. New York.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M.(2013) Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (8th ed.) Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Varberg, Purcell, dan Rigdon. 2007. Kalkulus: Edisi Kesembilan Jilid 1. Jakarta: Erlangga.

Waluya, SB. “Persamaan Diferensial”. halaman 46-64. Graha Ilmu. Yogyakarta. 2006.

Zwilinger, D. (Ed.). (2018). CRC standard mathematical tables and formulas. CRC press.

Kalkulus

Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom, M.Si, MM

BIO DATA PENULIS

Penulis memiliki berbagai disiplin ilmu yang diperoleh dari Universitas Diponegoro (UNDIP) Semarang. dan dari Universitas Kristen Satya Wacana (UKSW) Salatiga. Disiplin ilmu itu antara lain teknik elektro, komputer, manajemen dan ilmu sosiologi. Penulis memiliki pengalaman kerja pada industri elektronik dan sertifikasi keahlian dalam bidang Jaringan Internet, Telekomunikasi, Artificial Intelligence, Internet Of Things (IoT), Augmented Reality (AR), Technopreneurship, Internet Marketing dan bidang pengolahan dan analisa data (komputer statistik).

Penulis adalah pendiri dari Universitas Sains dan Teknologi Komputer (Universitas STEKOM) dan juga seorang dosen yang memiliki Jabatan Fungsional Akademik Lektor Kepala (Associate Professor) yang telah menghasilkan puluhan Buku Ajar ber ISBN, HAKI dari beberapa karya cipta dan Hak Paten pada produk IPTEK. Penulis juga terlibat dalam berbagai organisasi profesi dan industri yang terkait dengan dunia usaha dan industri, khususnya dalam pengembangan sumber daya manusia yang unggul untuk memenuhi kebutuhan dunia kerja secara nyata.

YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK

PENERBIT :
YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK
JL. Majapahit No. 605 Semarang
Telp. (024) 6723456. Fax. 024-6710144
Email : penerbit_ypat@stekom.ac.id

ISBN 978-623-5734-88-0 (PDF)
9 786235 734880

Kalkulus

Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom, M.Si, MM

YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK

PENERBIT :

YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK

JL. Majapahit No. 605 Semarang

Telp. (024) 6723456. Fax. 024-6710144

Email : penerbit_ypat@stekom.ac.id